UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 4/6/19 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $p_A(t) = (t+3)(t-i)^2$ si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è ortogonale e ha l'autovalore -1, si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[3:2:t-1]$ e $[2:-t:9]$ contiene il punto $[4:-1:9]$?

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione
$-8x^2+3y^2+5z^2-10xy+18xz-8yz+6z=0$. Spiegare.

5. Calcolare $\int_\alpha \sin(x)$ con $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\int_\alpha (3(y+5)\,\mathrm{d}x - 2(x+3)\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ t^2+3 \end{pmatrix}$.

7. Esistono forme chiuse ma non esatte sull'insieme
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < |x-3| < 2,\ \text{oppure } 1 < |y+3| < 2\}$? Spiegare.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 4/6/19 — Esercizî

1. Al variare di t in $\mathbb{R}$ considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t+2 & 3 & -t \\ 3 & 2t+1 & -7 \\ -t & -7 & 12 \end{pmatrix}$ e la forma bilineare f_t su $\mathbb{R}^3$ ad essa associata.

(A) (1 punto) Provare che f_t è sempre simmetrica.

(B) (6 punti) Al variare di t determinare i segni degli autovalori di A_t. [Un aiuto: per $t = 2$ vale $\det(A_t) = 0$.]

(C) (5 punti) Verificato che f_t è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ per $t = 4$, determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali rispetto a f_4 sia a $2e_1 - e_2 + e_3$ sia a $e_1 + e_2 + 2e_3$

2. Considerare $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(A) (5 punti) Trovare autovalori e autovettori di A e dire se essa sia diagonalizzabile.

(B) (4 punti) Esibire la matrice P della proiezione ortogonale su $w^\perp$ verficandone le proprietà caratterizzanti.

(C) (3 punti) Provare che $A + P$ ha l'autovalore 2. [Suggerimento: *non* esplicitare $A + P$.]

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. Non si può concludere nulla: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile mentre $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ non lo è

2. Sì, è coniugata a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

3. $t = 5$ e $t = \frac{13}{4}$

4. Paraboloide iperbolico: $d_2 < 0$, $d_3 = 0$, $d_4 \neq 0$

5. $\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 8\right)$

6. $\frac{101}{6}$

7. Sì, ad esempio la forma $\frac{(y+3)\,\mathrm{d}x - (x-3)\,\mathrm{d}y}{(x-3)^2 + (y+3)^2}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) A_t è sempre simmetrica.

(B) Due negativi e uno positivo per $t < -\frac{7}{2}$; uno negativo e due positivi per $-\frac{7}{2} < t < 2$ e per $t > 13$; tre positivi per $2 < t < 13$; uno nullo, uno negativo e uno positivo per $t = -\frac{7}{2}$; uno nullo e due positivi per $t = 2$ e $t = 13$

(C) Gli autovalori di A_4 sono positivi; $\pm\frac{2e_1+e_2}{3\sqrt{5}}$

2.

(A) Autovalore 1 con autovettori multipli non nulli di $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; autovalore 2 con autovettori multipli non nulli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; non diagonalizzabile perché 1 ha molteplicità algebrica 2 e geometrica 1

(B) $P = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 29 & 6 & -15 \\ 6 & 34 & 10 \\ -15 & 10 & 13 \end{pmatrix}$; ${}^{t}P = P \cdot P = P$

(C) L'autovettore $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di A relativo all'autovalore 1 è ortogonale a w, dunque $Au = Pu = u$, da cui $(A+P)u = 2u$