Geometria 7/5/2019

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{ [x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}] \ , \ x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \}$$

$$= \{ [x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1] : x \in \mathbb{R}^n \} \longleftarrow \mathbb{R}^n$$

$$\cup \{ [x_1 : x_2 : \dots : x_n : 0] : x \in \mathbb{R}^n \} \longleftarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ = compl. all'∞ di $\mathbb{R}^n$
= direzioni delle rette di $\mathbb{R}^n$.

Cambi di coord. naturali

- $\mathbb{R}^n$ come sp. vett. $\qquad x \longmapsto A \cdot x \qquad A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \qquad [x] \longmapsto [M \cdot x] \qquad M \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$, $\det(M) \neq 0$.

Quali sono i cambi di coord. naturali per $\mathbb{R}^n$ come sottoinsieme di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$? Quelli di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che preservano $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n \ni x \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Su cui agiscono le $M = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} A \\ {}^t w \end{matrix}}_{n} & \underbrace{\begin{matrix} v \\ c \end{matrix}}_{1} \end{pmatrix}\Big\}{}^{n}_{1} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$, preservano $\mathbb{R}^n$ se

$$\begin{pmatrix} A & v \\ {}^t w & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ha ultima coord} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} A \cdot x + v \\ {}^t w \cdot x + c \end{pmatrix}$$

dunque devo avere ${}^t w \cdot x + c \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$; se $w \neq 0$ prendo $x = -\frac{c}{\|w\|^2} \cdot w$ e ottengo 0; perciò devo avere $w = 0$ e dunque $c \neq 0$ ($\det(M) \neq 0$). Ora M e $\frac{1}{c} \cdot M$ danno stesso risultato $\Rightarrow$ posso supporre $c = 1$. Conclusione:

i cambi di coord. nat. per $\mathbb{R}^n$ come sottovarietà di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sono:

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right] \longmapsto \left[\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} Ax + v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x \longmapsto Ax + v \qquad (\det(A) \neq 0)$$

$\Rightarrow$ sono i cambi di coord. affini.

Chiamo quadrica non-degenere:

- proiettiva in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ un insieme del tipo:

$$\{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot A \cdot x = 0\}$$

$A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$ simm.
e $\det(A) \neq 0$.

- affine in $\mathbb{R}^n$ un insieme del tipo

$$\mathcal{L} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$ simm.
e $\det(A) \neq 0$.

Visto: data $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ con la medesima A
definisco il completamento proiettivo $\overline{\mathcal{L}} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
e i pt. all'∞ $\mathcal{L}_\infty = \overline{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L}$.

$n = 2$ coniche.

- $\mathcal{L}: x^2 + y^2 + 1 = 0$ insieme vuoto
$\overline{\mathcal{L}}: x^2 + y^2 + z^2 = 0$ completamento
$\mathcal{L}_\infty : x^2 + y^2 = 0$ $\quad \mathcal{L}_\infty = \{[x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x^2 + y^2 = 0\} = \emptyset$

• $\mathcal{L} : x^2+y^2=1$ ellisse

$\overline{\mathcal{L}} : x^2+y^2=z^2$ compl.

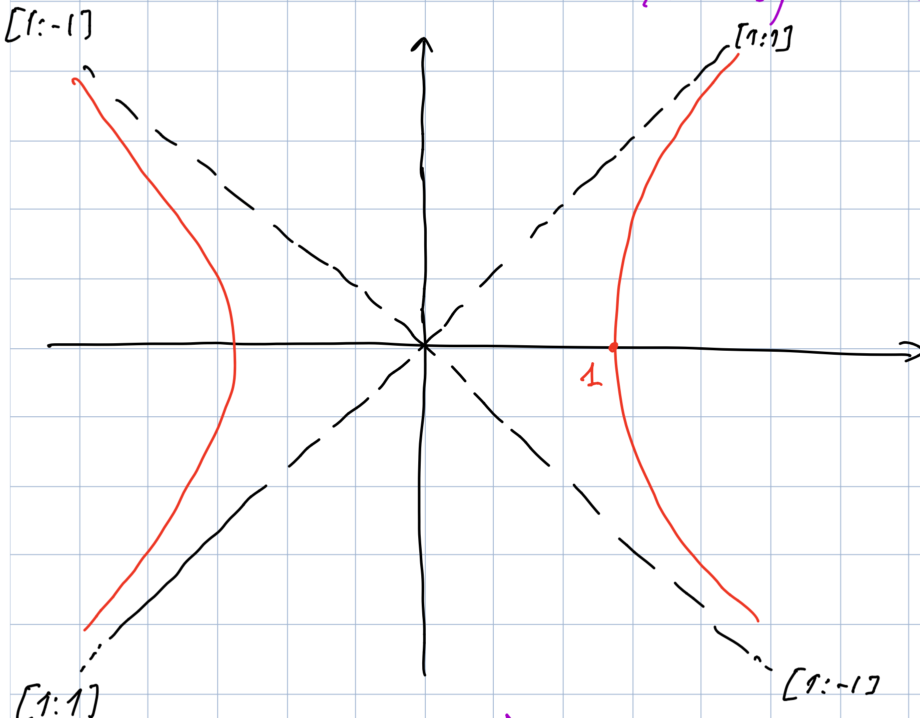
$\mathcal{L}_\infty : x^2+y^2=0$ $\emptyset$ l'ellisse non ha pti a ∞.

• $\mathcal{L} : x^2-y^2=1$ iperbole

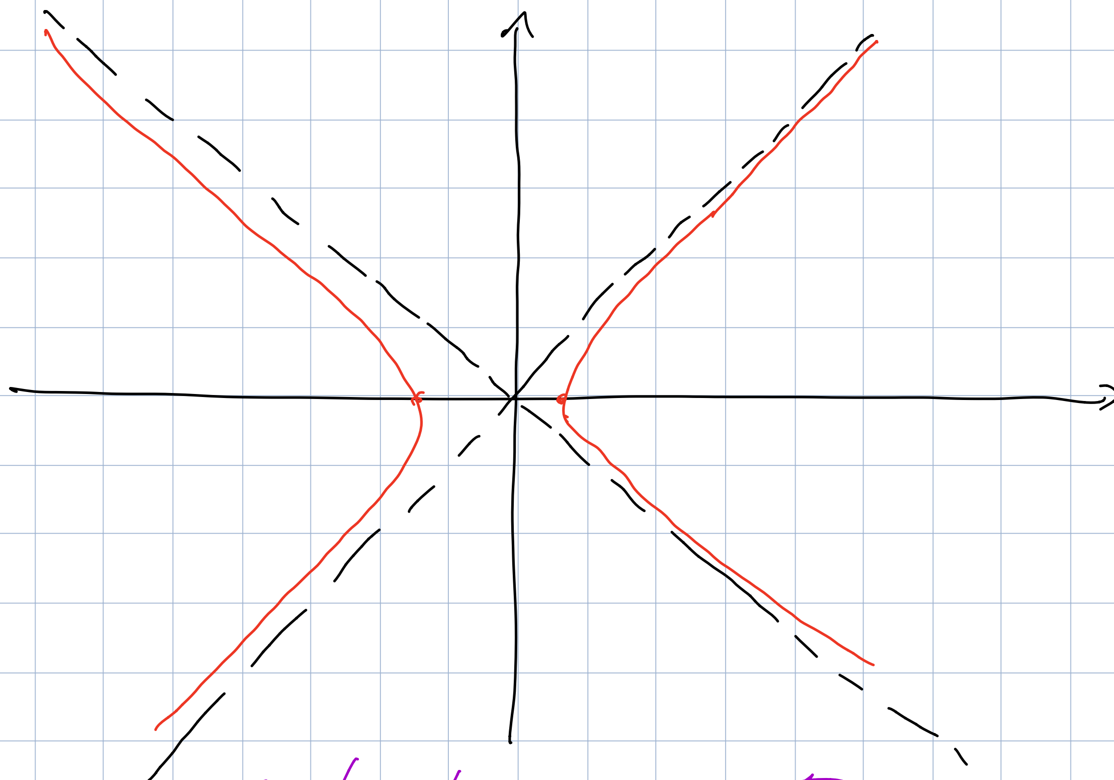
$\overline{\mathcal{L}} : x^2-y^2=z^2$ compl.

$\mathcal{L}_\infty : x^2-y^2=0$ $\mathcal{L}_\infty = \{[x:y] : x^2=y^2\}$

$= \{[1:1], [1:-1]\}$ due pti.



zoom out



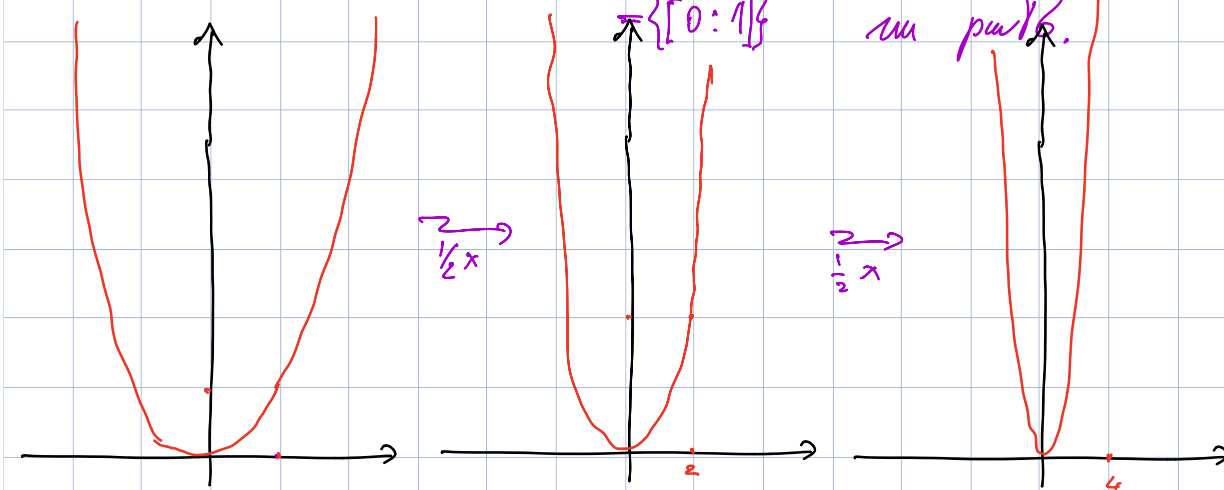
continuando a zoomare out l'iperbole si appoggia agli asintoti.

- $\mathcal{L} : y = x^2$ parabola

  $\overline{\mathcal{L}} : yz = x^2$ compl.

  $\mathcal{L}_\infty : x = 0$ $\quad \mathcal{L}_\infty = \{[x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x = 0\}$

  $= \{[0:1]\}$ un punto.



continuando a fare zoom out la parab. si schiaccia sul semiasse pos. delle ord. che ha direz. $[0:1]$.

Classificazione delle quadriche proiettive non deg.:

Prop: ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non deg. a meno di cambi di coord. proiettivi è

$$\{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_1^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2\}$$

con $p \geq n+1-p$ $\left(p \geq \frac{n+1}{2}\right)$.

Dim: $\mathcal{Q} = \{[x] : {}^t x \cdot A \cdot x = 0\}$ A simm. invert.
Grazie al teo spettrale $\exists Q$ ortogonale $({}^tQ = Q^{-1})$ t.c

$$Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda_j \neq 0.$$

Se sostituisco $[x]$ con $[Q \cdot x]$ ho l'equazione nuova

$${}^t(Q \cdot x) \cdot A \cdot (Q \cdot x) = 0$$

$${}^t x \cdot {}^tQ \cdot A \cdot Q \cdot x = 0$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}^2 = 0 \qquad \lambda_j \neq 0.$$

A meno di cambiare segno (non cambia il luogo) suppongo che ci siano p autoval > 0 e $n+1-p$ autoval neg con $p \geq n+1-p$; riordino le var in modo che quelli pos siano i primi p: equaz

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 = -\lambda_{p+1} x_{p+1}^2 - \dots - \lambda_{n+1} x_{n+1}^2$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0 \qquad \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{n+1} < 0.$

$$(\underbrace{\sqrt{\lambda_1}\, x_1}_{x_1})^2 + \dots + (\underbrace{\sqrt{\lambda_p} \cdot x_p}_{x_p})^2 = (\underbrace{\sqrt{-\lambda_{p+1}}\, x_{p+1}}_{x_{p+1}})^2 + \dots + (\underbrace{\sqrt{-\lambda_{n+1}} \cdot x_{n+1}}_{x_{n+1}})^2$$

$$\longrightarrow \quad x_1^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 \qquad \boxed{//}$$

Quadriche proiettive in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non deg. con n piccolo:

$n = 1 \qquad x^2 + y^2 = 0 \qquad \emptyset$

$\qquad\qquad x^2 = y^2 \qquad$ 2 punti

$n = 2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \emptyset$

$\qquad\qquad x^2 + y^2 = z^2 \qquad$ l'unica conica proiett. non deg.

$n = 3 \qquad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 \qquad \emptyset$

$\qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \qquad$ ellissoide proiettivo

$\qquad\qquad x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \qquad$ iperboloide proiettivo.

——— o ———

Classificazione affine delle quadriche in $\mathbb{R}^n$ non deg

($n = 2$ coniche — già enunciato, $n = 3$).

Partiamo da equaz. $\quad {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad$ A simm. $\det(A) \neq 0$

Vogliamo classificare il luogo dato da tale equazione a meno di trasf. affini, cioè sostituendo

$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ con $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(B) \neq 0$.

Se scriviamo $A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix}$

Q = matrice parte quadratica equaz.

l = vettore di metà della parte lineare

c = termine noto

l'azione di tale trasformazione è:

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot {}^tM \cdot A \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 $$

$$ A \rightsquigarrow {}^tM \cdot A \cdot M $$

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 $$

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \cdot B & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 $$

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^tB \cdot Q \cdot B & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 $$

$$ Q \rightsquigarrow {}^tB \cdot Q \cdot B. $$

Oss: il luogo non cambia se moltiplichiamo per un numero positivo oppure se cambiamo segno.

La classificaz. dipende dai segni degli autoval. di A e di Q. Se moltiplico l'equaz. per $k > 0$ tali segni non cambiano. Se cambio segno cambiano tutti.

Teo: $\mathcal{I} = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : \ {}^t\!\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ con $A \in M_{3\times 3}$ simm. $\det(A) \neq 0$

"e^c" $=$ "tramite una trasf. affine si riconduce a uno dei 4 modelli descritti"

$\emptyset$ ($x^2+y^2+1=0$ modello) se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$

ellisse ($x^2+y^2=1$ modello) se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$

iperbole ($x^2-y^2=1$ modello) se $d_2 < 0$ ($d_3 \neq 0$)

parabole ($y = x^2$ modello) se $d_2 = 0$ ($d_3 \neq 0$).

Dim: osservo che le condizioni su d_2 e $d_1 \cdot d_3$ sono preservate da tutte le operazioni di cambio equaz. descritte sopra:

- $A \rightsquigarrow {}^tMAM$ (esercizio: vedere che segno di $d_1 \cdot d_3$ non cambia)

  $Q \rightsquigarrow {}^tB \cdot Q \cdot B$

  $\det(Q) \rightsquigarrow \det(B)^2 \cdot \det(Q) \Rightarrow$ segno d_2 non cambia

- moltiplicare per $k > 0$; d_1, d_2, d_3 mantengono il segno.

- cambio segno a equaz: d_2 invariato, d_1, d_3 cambiano segno

  $\Rightarrow d_1 \cdot d_3$ invariato.

Proviamo che con queste trasf. otteniamo i modelli:

$$A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}. \quad Q \text{ simm } 2\times 2 \Longrightarrow \exists B \text{ ortog}$$

che la diagonalizza

$\Longrightarrow$ con cambio coord. $x \leadsto B\cdot x$ mi riconduco a

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Tali λ_1, λ_2 possono essere:

- concordi $\longrightarrow$ suppongo positivi entrambi ①
- discordi $\longrightarrow$ suppongo pos. il primo ②
- uno nullo $\longrightarrow$ suppongo pos. il primo. ③

NON: entrambi nulli, poiché altrimenti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

ma essa ha $\det(A) = 0$: escluso.

$$\lambda_1 x^2 + 0\cdot xy + \lambda_2 \cdot y^2 + \alpha x + \beta y + c = 0$$

$$(\underbrace{\sqrt{\lambda_1}\, x}_{x})^2 + \dots \pm (\underbrace{\sqrt{|\lambda_2|}\cdot y}_{y})^2 + \dots = 0$$

Dunque ho $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ①, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ②, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ③.

Casi ① + ② : agisco con $\begin{pmatrix} I_2 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ {}^t v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t v Q + {}^t l & {}^t v \cdot l + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q & \boxed{Q \cdot v + l} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

scegliendo $v = -Q^{-1} \cdot l$ uccido la parte lineare

$\Rightarrow$ matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ equaz. $x^2 \pm y^2 + c = 0$

divido per $|c| \neq 0$: $$\Big(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{|c|}}}_{x}\Big)^2 \pm \Big(\underbrace{\frac{y}{\sqrt{|c|}}}_{y}\Big)^2 \pm 1 = 0$$

trovo le equazioni
$x^2 + y^2 + 1 = 0$ $\emptyset$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$ ellisse
$x^2 - y^2 \pm 1 = 0$ iperbole.

Caso ③ : analog. a sopra mi riconduco a

matr. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & c \end{pmatrix}$ equaz. $x^2 + \underbrace{2ky + c}_{-y} = 0$

$\Rightarrow y = x^2$ parabola. $\boxtimes$

Interpretiamo le condizioni che danno la classificazione in termini di autovalori di Q e di A:

$d_2 > 0 \quad d_1 \cdot d_3 > 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Q ha due autoval concordi; A ha autoval concordi con quelli di Q

$d_2 > 0 \quad d_1 \cdot d_3 < 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Q ha due autoval. concordi; A uno non concorde con Q

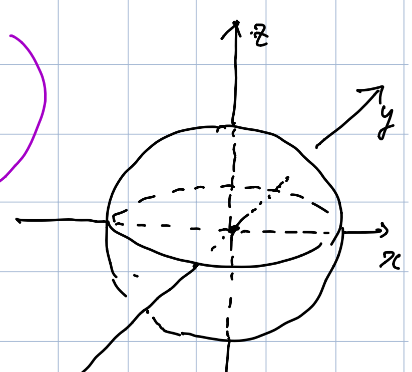
$d_2 < 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Q ha autoval discordi

$d_2 = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1/2 \\ & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Q ha un autoval 0.

Modelli affini delle quadriche.

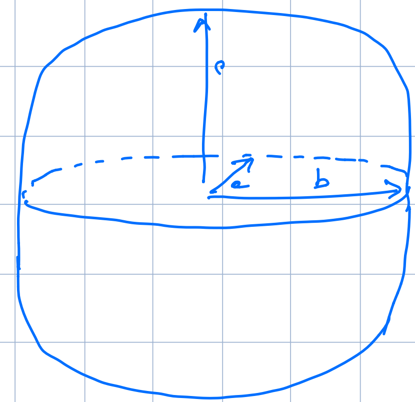
1) $x^2+y^2+z^2+1=0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \emptyset$

2) $x^2+y^2+z^2=1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$



ellissoide

[modello metrico : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$:



.]

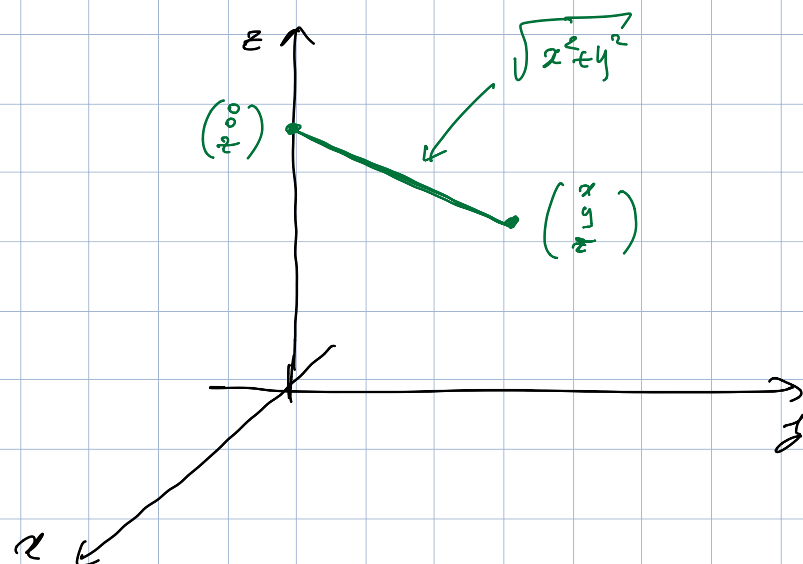
3) paraboloide ellittico

$z=x^2+y^2$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Oss</u>: per un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ la quantità x^2+y^2

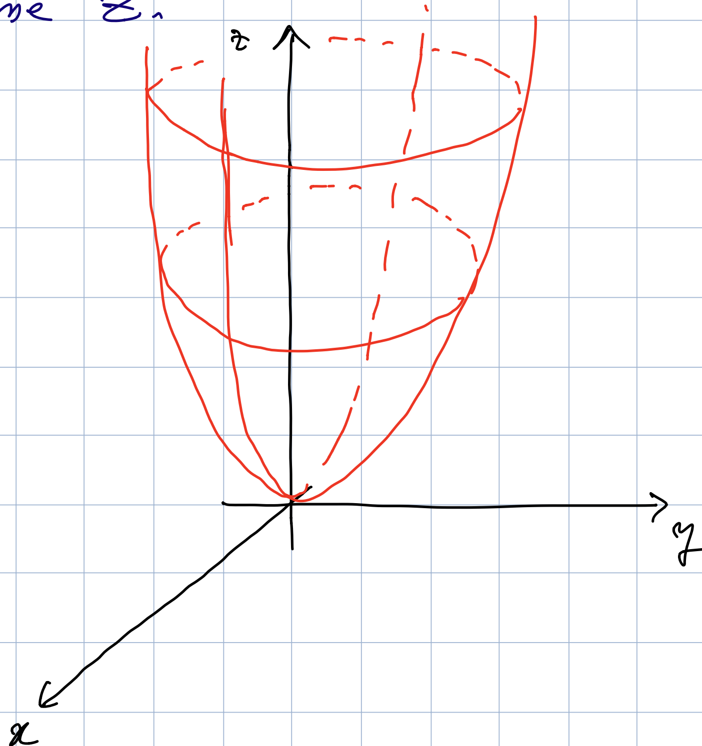
$\Downarrow$

è il quadrato della distanza dall'asse z.



Dunque: se in una equazione x e y compaiono solo nella espressione x^2+y^2 allora se un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione, la soddisfano tutti i punti ottenuti ruotandolo attorno all'asse z $\Longrightarrow$ la superficie definita dall'equazione è una superficie di rotazione intorno all'asse z.

$z = x^2+y^2$

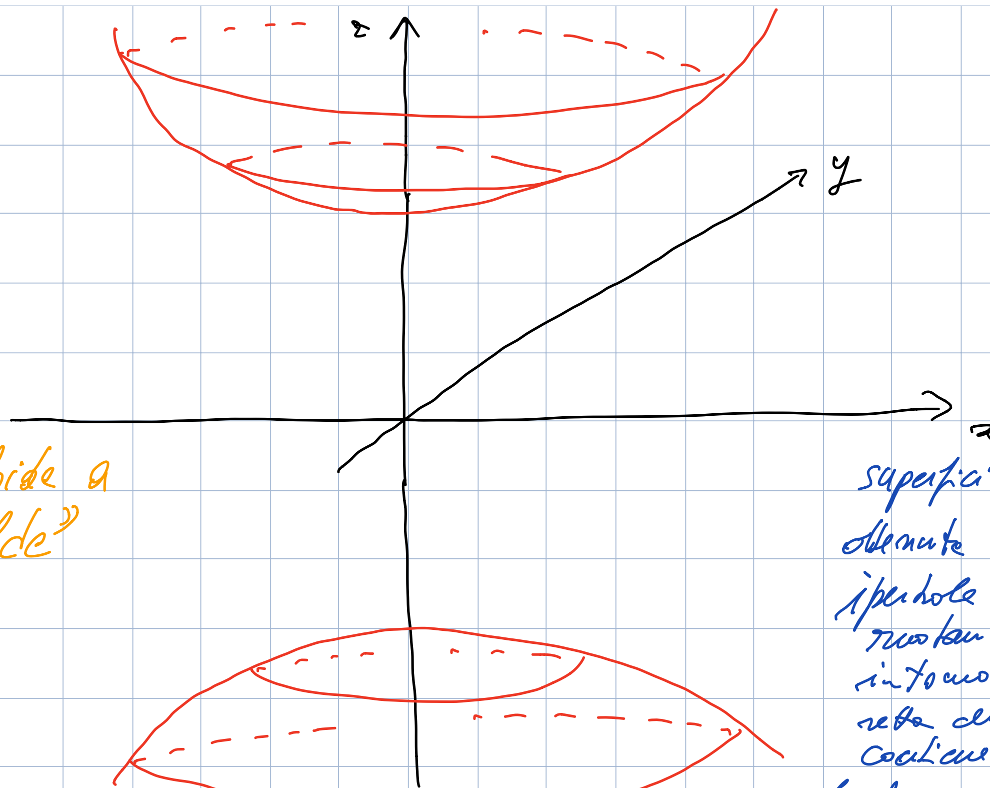


4) Iperboloide ellittico $\quad x^2+y^2 = z^2-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

E' superf. di rotaz. intorno all'asse z:

iperboloide a "due falde"



superficie ottenuta da iperbole ruotando intorno a retta che contiene fuochi e vertici