Geometria 10/4/19

Prop: se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale ($^tA = A^{-1}$, colonne base ortonormale) allora esiste $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonale t.c.

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & B_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

con $B_j = (\pm 1)$ o $B_j = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

+1 identità

−1 riflessione rispetto a iperpiano

rotaz. intorno a sottosp. di codim. 2.

Idea dimo: so che gli autoval hanno modulo 1:

$\pm 1 \to$ scelgo autovettori reali

$e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta) \notin \mathbb{R}$ $\quad x + iy$ autovett. complesso:

$$A \cdot (x+iy) = (\cos\vartheta + i\sin(\vartheta)) \cdot (x+iy)$$

$$= (x\cos(\vartheta) - y\sin(\vartheta)) + i\,(x\sin(\vartheta) + y\cos(\vartheta))$$

$Ax + i\,Ay$

$$\text{“}\Rightarrow\text{”} \quad [A]^{(x,-y)}_{(x,-y)} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

come nel caso antisimm. perché $x - iy$ è autovett.
rispetto a $e^{-i\vartheta}$ ottengo $\|x\| = \|y\|$ e $\langle x | y \rangle = 0$
$\Rightarrow$ posso prenderli base ortonormale. $\blacksquare$

<u>Conseguenza</u>: classificazione isom. di $\mathbb{R}^3$; in opportune coordinate ortog. monometriche ho:

- $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ identità
- $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ riflessione risp. a piano (xy)
- $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ riflessione risp. a retta (x)
- $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ riflessione rispetto all'origine $(-id)$
- $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rotazione intorno retta (z)
- $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rotazione intorno a retta r composta con riflessione rispetto a piano $r^{\perp}$

Q: quali sono le trasformazioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che preservano le distanze (isometrie o movimenti rigidi)

SENZA CHIEDERE f LINEARE

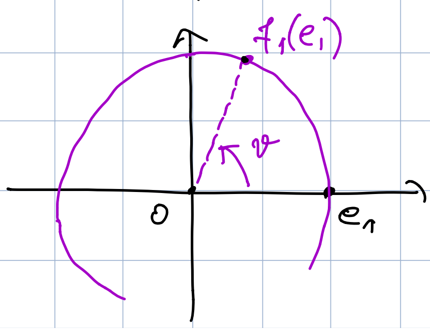
Certamente ok:

- lineari ortogonali: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ${}^tA = A^{-1}$
  $f(x) = A\cdot x$ è isometria
- traslazioni: $v \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + v$
- loro composizioni: $\underbrace{f(x) = A\cdot x + v}_{\text{le chiamo trasf. affini}}$ ${}^tA = A^{-1}$

Teo: ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ è affine.

Dim ($n=2$): considero $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria.
pongo $v = f(0)$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g(x) = x - v$
$f_1 = g\circ f$; f_1 è composiz. isom $\Rightarrow$ isom ;
$f_1(0) = g(f(0)) = g(v) = v - v = 0$. f_1 isom. che fissa 0

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $d(0,e_1) = 1 \Rightarrow d(f_1(0), f_1(e_1)) = 1$
$\Rightarrow d(0, f_1(e_1)) = 1$



Pongo h = rotaz. di angolo $-\vartheta$ intorno a 0
$f_2 = h\circ f_1$

f_2 composiz. di isom $\Rightarrow$ isom.

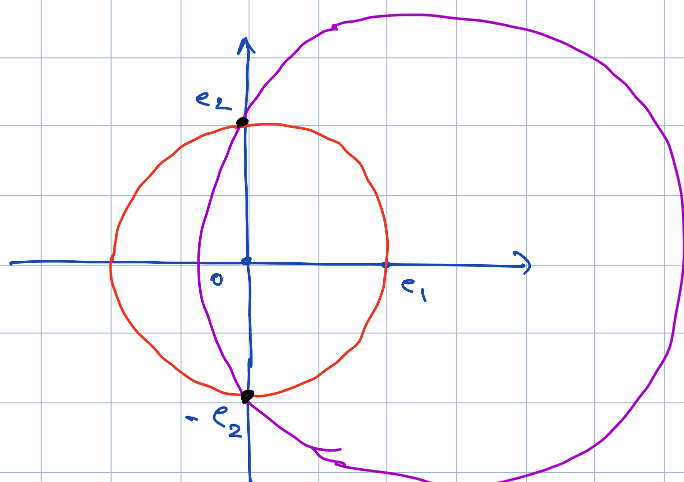
$f_2(e_1) = h(f_1(e_1)) = e_1$

$f_2(0) = h(f_1(0)) = h(0) = 0$

f_2 isom. che fissa $0, e_1$

$f_2(e_2) = ?$ $\quad d(0, e_2) = 1 \Rightarrow d(f_2(0), f_2(e_2)) = \underline{d(0, f_2(e_2)) = 1}$

$d(e_1, e_2) = \sqrt{2} \Rightarrow d(f_2(e_1), f_2(e_2)) = \underline{d(e_1, f_2(e_2)) = \sqrt{2}}$



$\Rightarrow f_2(e_2) = \pm e_2$

Se $f_2(e_2) = e_2$ $\quad$ pongo $l = id$

Se $f_2(e_2) = -e$ $\quad$ pongo $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ riflessione asse x

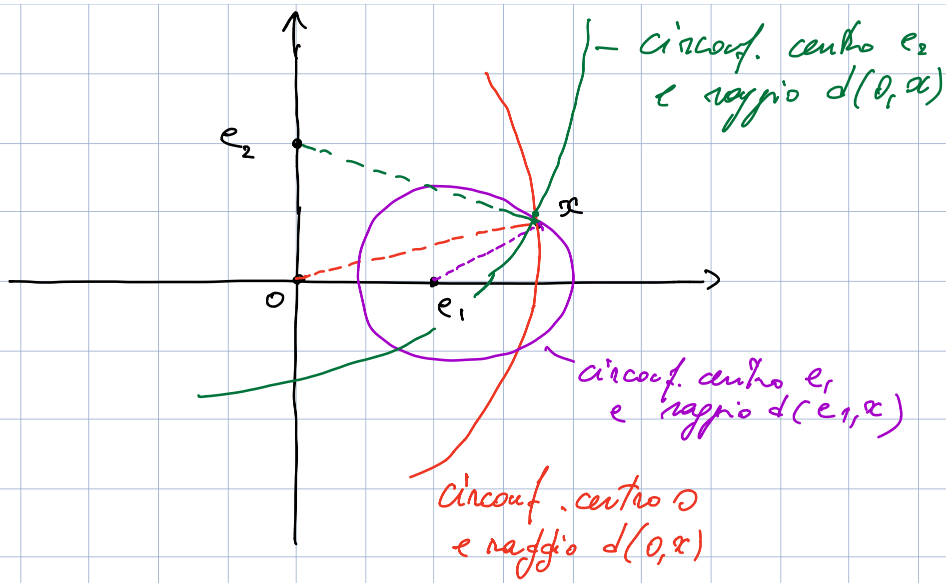
Pongo $f_3 = l \circ f_2$ $\Rightarrow$ f_3 isometria che fissa $0, e_1, e_2$.

l: fissa $0, e_1$ isom.

Se $x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{d(0, x)} = d(f_3(0), f_3(x)) = \underline{d(0, f_3(x))}$

$\underline{d(e_1, x)} = \ldots\ldots = \underline{d(e_1, f_3(x))}$

$\underline{d(e_2, x)} = \ldots\ldots = \underline{d(e_2, f_3(x))}$



$f_3(x)$ deve stare su tutte e tre le circonferenze disegnate però esse si incontrano nel solo pto x (centri non allineati)

$$\Rightarrow f_3(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f_3 = id$$

Però: $\quad f_3 = l \circ f_2 = l \circ h \circ f_1 = l \circ h \circ g \circ f$

$$\Rightarrow l \circ h \circ g \circ f = id \Rightarrow f = g^{-1} \circ h^{-1} \circ l^{-1}$$

$l^{-1} = l$ affine

g^{-1}: trasl. di vett. v affine

h^{-1}: rotaz. ang. α affine

composiz. di trasf affini è affine

$$\Rightarrow f(x) = A \cdot x + v$$

e tale A è mat. ortogonale.

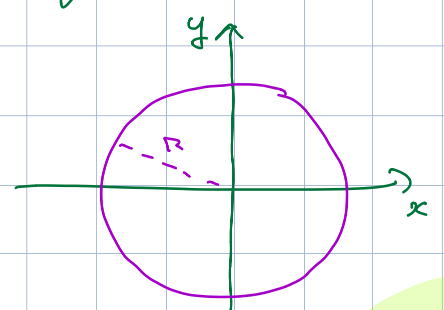
CONICHE E QUADRICHE
(E SPAZI PROIETTIVI)

CONICHE

Modelli metrici di luoghi nel piano $\mathbb{R}^2$ definiti da condizioni metriche.

Circonferenza: $\mathcal{C} = \{$luogo dei pti aventi distanza fissata da $\underbrace{\text{un pto fissato}}_{\text{centro}}\}$

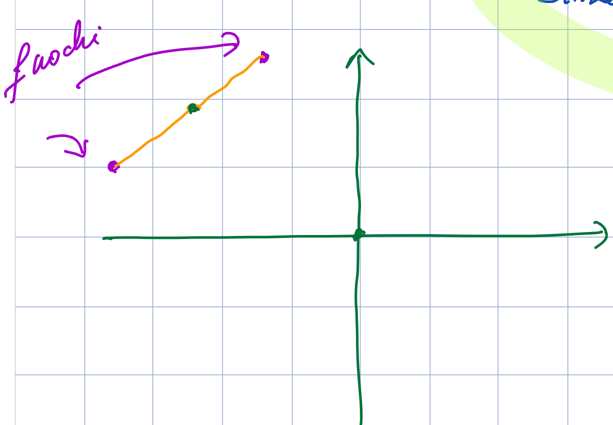
Se scelgo coordinate (tramite traslaz.) con origine nel centro



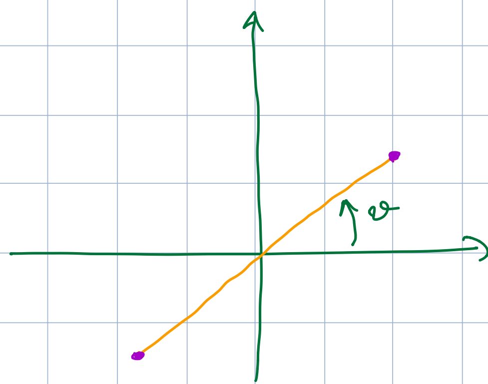
$\mathcal{C}: x^2+y^2=r^2$

equaz. canonica metrica della circonf.

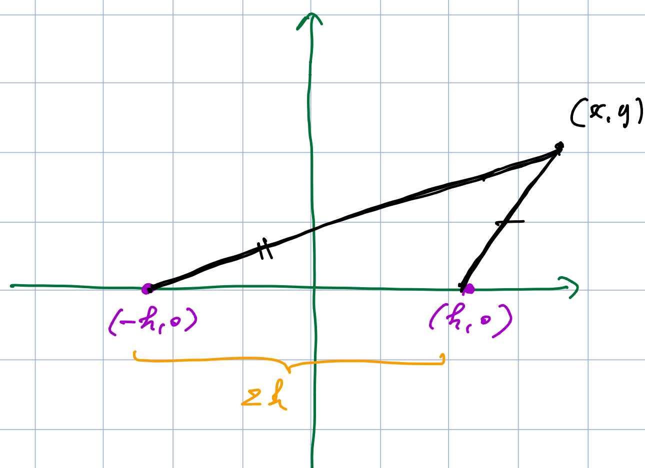
ellisse: $E = \{$luogo dei pti aventi somma delle distanze fissata da $\underbrace{\text{due punti fissati}}_{\text{fuochi}}\}$



cambio coordinate (via traslaz.) in modo che il punto medio del segmento con estremi i fuochi sia l'origine.



cambio coordinate (via rotaz. di angolo ϑ)



Ricavo equaz:

$$\sqrt{(x-h)^2+y^2} + \sqrt{(x+h)^2+y^2} = 2k \qquad (2k > 2h)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2k - \sqrt{(x-h)^2+y^2} = \sqrt{(x+h)^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow \quad 4k^2 - 4k\sqrt{(x-h)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cancel{4}k^2 - \cancel{4}xh = \cancel{4}k\sqrt{(x-h)^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow \quad k^4 - \cancel{2k^2xh} + x^2h^2 = k^2x^2 - \cancel{2k^2xh} + k^2h^2 + k^2y^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad (k^2-h^2)x^2+k^2y^2 = k^2(k^2-h^2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-h^2}=1 \qquad k^2>0 \quad a=k$$

$$k^2-h^2>0 \qquad b=\sqrt{k^2-h^2}$$

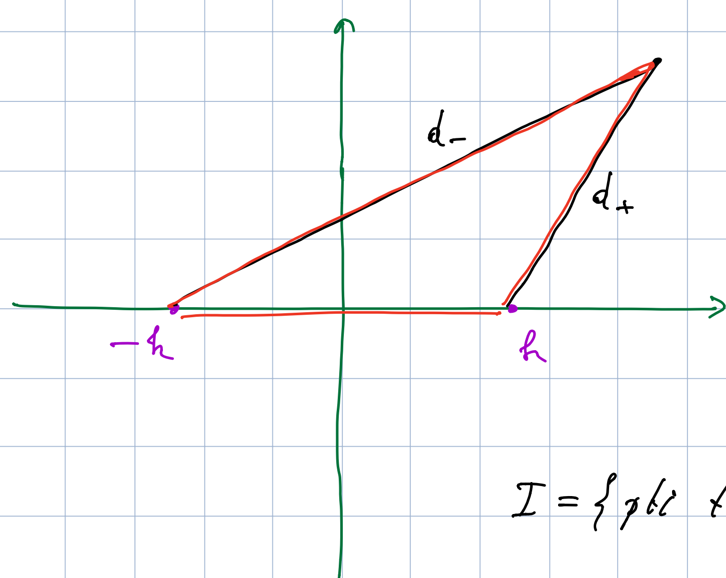
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ equazione canonica metrica dell'ellisse

mi posso sempre ricondurre a lei tramite isometria

Fatto: tutte le "$\Longrightarrow$" sono "$\Longleftrightarrow$".

Dunque nelle coord. scelte: $E=\left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

iperbole: $I=\{$luogo dei punti aventi differenza delle distanze fissata da due pti fissati$\}$.



$I=\{$pti t.c. $|d_- - d_+|=2k\}$

$$d_- < d_+ + 2h \qquad\qquad d_- - d_+ < 2h$$
$$\Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow |d_- - d_+| < 2h$$
$$d_+ < d_- + 2h \qquad\qquad d_+ - d_- < 2h$$

Devo avere $2k < 2h$

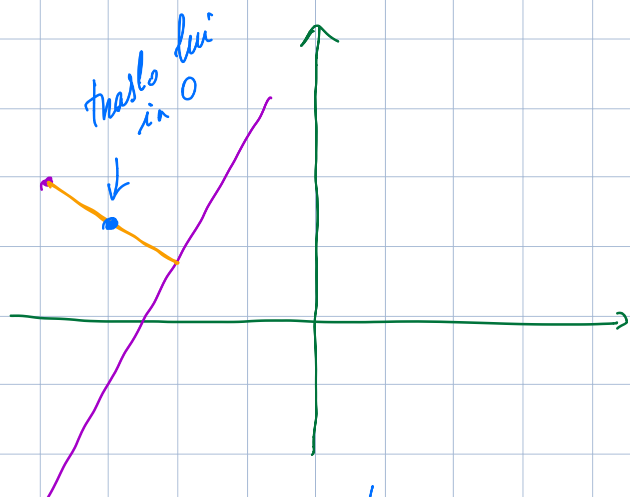
$$\pm\left(\sqrt{(x-h)^2+y^2} - \sqrt{(x+h)^2+y^2}\right) = 2k$$

stessi calcoli di prima — irrilevante perché elevato al □

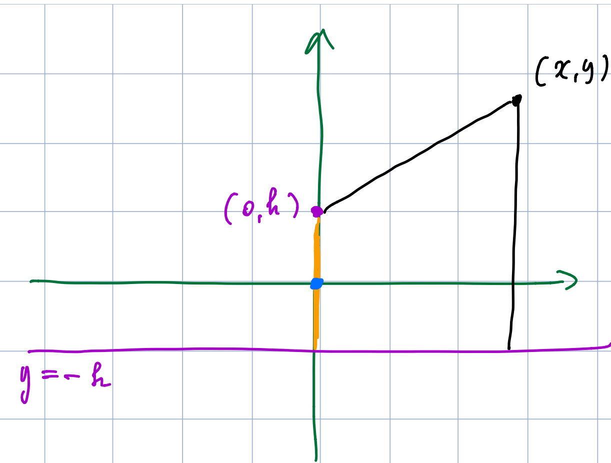
$\Rightarrow$ ottengo stesse $\quad \dfrac{x^2}{k^2} - \dfrac{y^2}{h^2-k^2} = 1 \qquad k^2>0$, $h^2-k^2>0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{equazione canonica dell'iperbole.}$$

<u>parabola</u> : $\quad P = \{$ luogo dei pti equidist. da pto e retta fissati (pto $\notin$ retta) $\}$



+ ruoto



$$\sqrt{x^2+(y-h)^2} = |y+h|$$

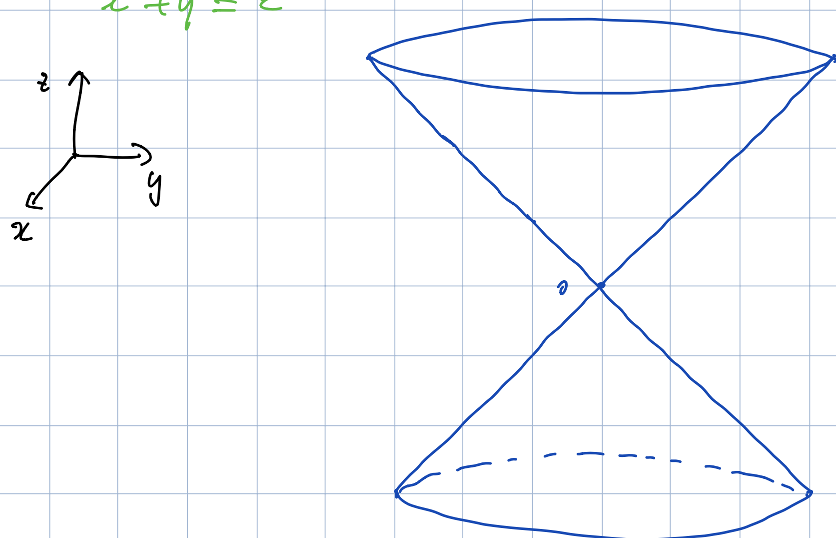
$$x^2 + \cancel{y^2} - 2hy + \cancel{h^2} = \cancel{y^2} + 2hy + \cancel{h^2}$$

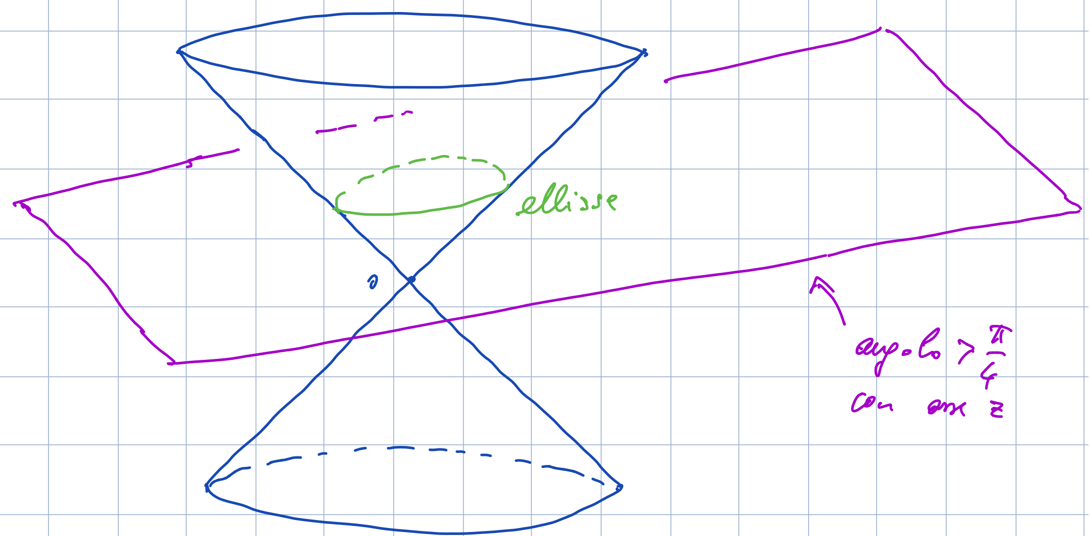
$$y = \frac{1}{4h}\cdot x^2$$

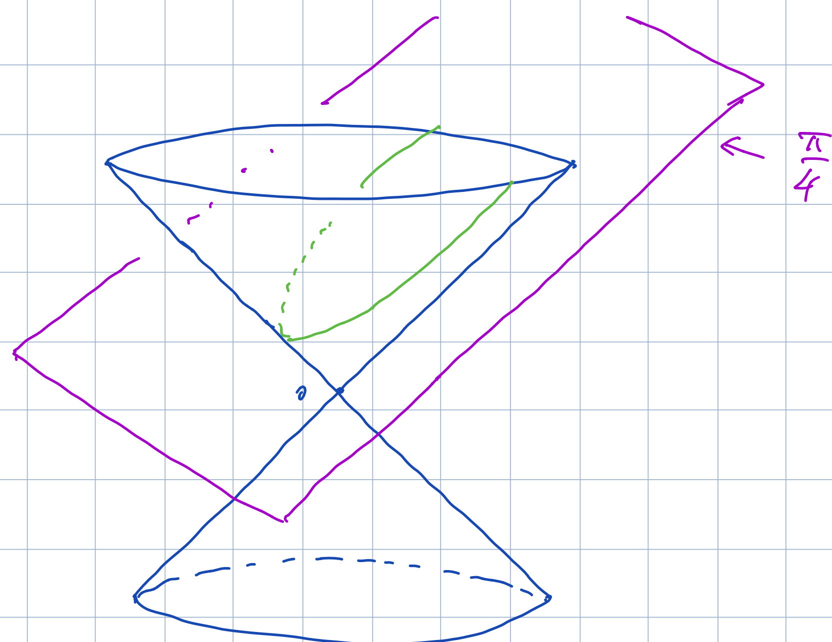
$y = a\cdot x^2$ equaz. canonica cartesiana parabola.

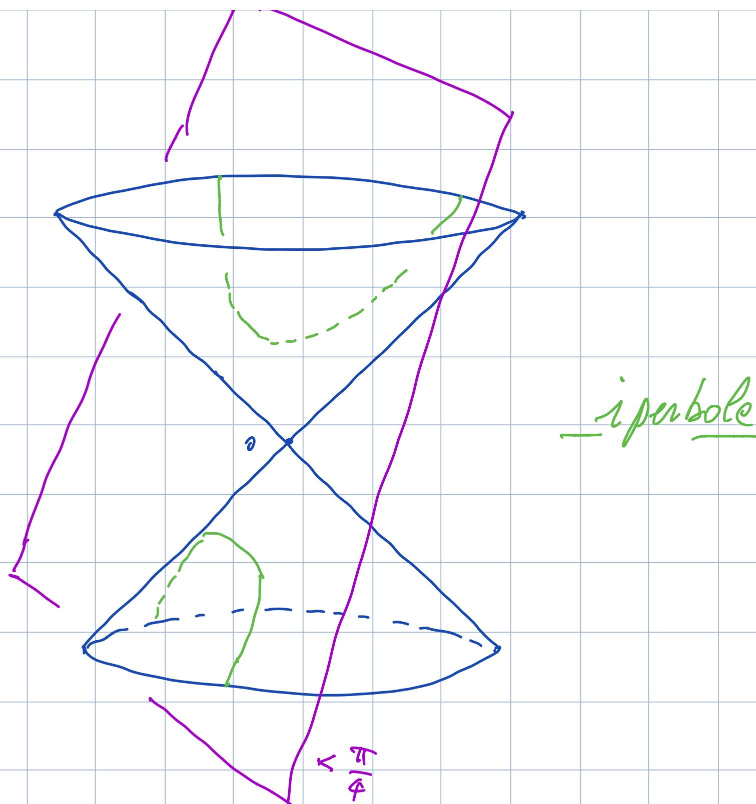
CONICHE: ottenute come sezioni piane di cono:

$x^2+y^2=z^2$




ellisse
O
angolo > $\frac{\pi}{4}$
con asse z


O
$\frac{\pi}{4}$



coniche modello metriche: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$

$y = a \cdot x^2$

$\Rightarrow$ luoghi definiti da equazioni polinomiali di II grado nelle coordinate.

Scopo: classificare tutti i luoghi così definiti a meno di trasformazioni affini (non metriche)

A non ortogonale

$f(x) = A \cdot x + v$

$v \in \mathbb{R}^2$, $A \in M_{2\times 2}$, $\det(A) \neq 0$

Accettando trasf affini ho equazioni canoniche:

C, E, I $\quad \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1 \rightsquigarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightsquigarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

$\frac{x}{a} \to X \qquad \frac{y}{b} \to Y$

$$X^2+Y^2=1$$
$$X^2-Y^2=1$$

eq. canoniche affini di C, E, I, P

$$Y=X^2$$

P $\quad y=ax^2 \rightsquigarrow \frac{y}{a}=x^2$

$\frac{y}{a} \to Y \qquad x^2 \to X$

Q: che tipo di luogo è definito da una equazione

$$\underbrace{a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2}_{\text{part. quadr}}+\underbrace{2a_{13}x+2a_{23}y}_{\text{parte lin}}+\underbrace{a_{33}}_{\text{termine noto}}=0 \quad ?$$

Oss: posso riscrivere questa equazione come:

$$^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

Si tratta di $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2$ valutato per $z=1$

Es: all'equazione $7x^2 - 5xy + 3y^2 - 8x + 13y + \pi = 0$
associo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5/2 & -4 \\ -5/2 & 3 & 13/2 \\ -4 & 13/2 & \pi \end{pmatrix}$$

ed ho che l'equaz. si riscrive come ${}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Def: dico che un luogo $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ è parabola/ellisse/iperbole se esiste $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $f(\mathcal{L})$ è uno dei modelli metrici di parabola/ellisse/iperbole.

ATTENZIONE: $\mathcal{L}$ non ha le proprietà metriche del modello al quale si riconduce.

Teo: se $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ con A simmetrica e $\det(A) \neq 0$

ipotesi: la conica è non degenere

allora $\mathcal{L}$ è:

- $\emptyset$ se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$
- ellisse se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$
- parabola se $d_2 = 0$
- iperbole se $d_2 < 0$.

$d_j = \det\left(\begin{array}{c|c} j \times j & \\ \hline & \end{array} \right)$

Questi sono tutti i casi possibili.

Verifico che le equaz. canoniche soddisfano:

$\emptyset : x^2+y^2+1=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $d_1>0$, $d_2>0$, $d_3>0$

$E : x^2+y^2-1=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $d_1>0$, $d_2>0$, $d_3<0$

$I : x^2-y^2-1=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ $d_2<0$, $d_3\neq 0$

$P : y=x^2 \quad x^2-y=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ $d_2=0$, $d_3\neq 0$

Esempi di coniche degeneri:

$0=0$	$\mathbb{R}^2$
$1=0$	$\emptyset$
$x^2=0$	una retta
$x^2+1=0$	$\emptyset$
$x^2-1=0$	due rette parallele
$x^2-y^2=0$	due rette incidenti
$x^2+y^2=0$	un pto

Fatto: tutte le degeneri si riconducono tramite affinità a una di queste