Geometria 21/3/19

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$: $\mathbb{C}^n \ni z = x + iy \longleftrightarrow \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2$$
$$= |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$
$$= \bar{z}_1 \cdot z_1 + \dots + \bar{z}_n \cdot z$$

$\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t\bar{w} \cdot z$ prodotto scalare hermitiano canonico di $\mathbb{C}^n$.

Analizzando le proprietà si generalizza:

Def: Se V è uno sp. vett. su $\mathbb{C}$, chiamo
$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

- sesquilineare se è lin a sinistra
$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 | v_3 \rangle = \alpha_1 \langle v_1 | v_3 \rangle + \alpha_2 \langle v_2 | v_3 \rangle$$
  e antilineare a destra
$$\langle v_1 | \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \rangle = \bar{\alpha}_2 \langle v_1 | v_2 \rangle + \bar{\alpha}_3 \langle v_1 | v_3 \rangle$$
- hermitiano se $\langle v_2 | v_1 \rangle = \overline{\langle v_1 | v_2 \rangle}$

(se è hermitiano ho $\langle v | v \rangle = \overline{\langle v | v \rangle} \Rightarrow \langle v | v \rangle \in \mathbb{R}$)

- definito positivo se $\langle v | v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$
- prodotto scalare hermitiano se valgono le precedenti

Oss: $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n}$ soddisfa le proprietà

- $\langle \alpha z + \beta w | u\rangle = {}^t\bar{u}\cdot(\alpha z+\beta w) = \alpha\, {}^t\bar{u} z + \beta\, {}^t\bar{u} w$
$$= \alpha\langle z|u\rangle + \beta\langle w|u\rangle$$
$$\langle z|\alpha w+\beta u\rangle = {}^t\overline{(\alpha w+\beta u)}\cdot z = \left(\bar{\alpha}\cdot{}^t\bar{w} + \bar{\beta}\cdot{}^t\bar{u}\right)\cdot z$$
$$= \bar{\alpha}\,{}^t\bar{w} z + \bar{\beta}\,{}^t\bar{u} z = \bar{\alpha}\langle z|w\rangle + \bar{\beta}\langle z|u\rangle$$

- $\langle w|z\rangle = {}^t\bar{z}\cdot w = {}^t({}^t\bar{z}\cdot w) = {}^t w\cdot \bar{z}$
$\langle z|w\rangle = {}^t\bar{w}\cdot z$

coniugati fra loro

- $\langle z|z\rangle = {}^t\bar{z}\cdot z = (\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n)\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix} = |z_1|^2+\dots+|z_n|^2 > 0$
se $z\neq 0$.

Def: se $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ pongo $A^* = \underbrace{{}^t\bar{A}}_{} \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$.
detta matrice "coniugata"

Es: $\begin{pmatrix} 1-i & 2+i & 7-3i \\ 4 & 5i & 12-7i\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1+i & 4 \\ 2-i & -5i \\ 7+3i & 12+7i\end{pmatrix}$

Es: Su $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\qquad \langle A|B\rangle = tr(B^*\cdot A)$
(verifiche come nel caso reale)

Es: Su $C^0([0,1],\mathbb{C})$ $\qquad \langle x|y\rangle = \int_0^1 x(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt$

Tutta la teoria si ripete badando che non c'è più simmetria: devo ricordare che $\langle\cdot|\cdot\rangle$ è lin. a sin e antilin. a destra.

[Qualcuno fa il contrario: lin a dx, antilin a sin.]

Def: su $\mathbb{C}^n$ data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ definisco

$$\langle\cdot|\cdot\rangle_A \ : \ \langle z|w\rangle_A = {}^t\bar{w}\cdot A\cdot z$$

Prop: $\{\underbrace{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m}_{\text{sesquilineari}}\} = \{\langle\cdot|\cdot\rangle_A : A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})\}$

(dimo come su $\mathbb{R}$).

Prop: $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è hermitiana $\iff A^* = A$ (diremo A hermitiana)

Dimo: $\Leftarrow$ Suppongo $A^* = A$, dunque ${}^t\bar{A} = A \Rightarrow {}^tA = \bar{A}$

$$\langle w|z\rangle_A = {}^t\bar{z}\cdot A\cdot w = {}^t({}^t\bar{z}\cdot A\cdot w) = {}^tw\cdot{}^tA\cdot\bar{z} = {}^tw\cdot\bar{A}\cdot\bar{z}$$

$$\langle z|w\rangle_A = {}^t\bar{w}\cdot A\cdot z$$

coniugati fra loro.

$\Rightarrow$ $\langle w|z\rangle_A = \overline{\langle z|w\rangle_A} \quad \forall z,w \in \mathbb{C}^n$

$${}^t\bar{z}\cdot A\cdot w - \overline{({}^t\bar{w}\cdot A\cdot z)} = 0 \qquad ''$$

$${}^t\bar{z}\cdot A\cdot w - {}^tw\cdot\bar{A}\cdot\bar{z} = 0 \qquad ''$$

$${}^t\bar{z}\cdot A\cdot w - {}^t\bar{z}\cdot\underline{{}^t\bar{A}}\cdot w = 0 \qquad ''$$

$${}^t\bar{z}\cdot(A-A^*)\cdot w = 0 \qquad \text{"}$$

applicandolo con $z=e_i$, $w=e_j$ trovo

$$(A-A^*)_{ij} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad A^* = A. \qquad \blacksquare$$

Q: Come stabilire data A hermitiana se $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è def. pos.?

Oss: $\mathbb{C}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}^{2n} \qquad \langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n} \overset{?}{\longleftrightarrow} \langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$

$$\begin{aligned}
\langle x+iy \,|\, u+iv\rangle_{\mathbb{C}^n} &= {}^t\overline{(u+iv)}\cdot(x+iy)\\
&= ({}^tu - i\,{}^tv)(x+iy)\\
&= \underbrace{{}^tux + {}^tv\cdot y}_{\left\langle \binom{x}{y} \middle| \binom{u}{v} \right\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}} + i\,({}^tu\cdot y - {}^tv\cdot x)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \mathcal{R}e\left(\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n}\right)$$

Def: Su V con $\langle\cdot|\cdot\rangle$ complesso pongo

$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle} \geq 0$ (l'unica radice ≥ 0 di $\langle v|v\rangle \geq 0$)

(norma)

Oss: $$\begin{aligned}
\|z+w\|^2 &= \langle z+w \,|\, z+w\rangle\\
&= \langle z \,|\, z+w\rangle + \langle w \,|\, z+w\rangle\\
&= \langle z|z\rangle + \underbrace{\langle z|w\rangle + \langle w|z\rangle} + \langle w|w\rangle
\end{aligned}$$

$\quad\;\; \|\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\|z\|^2 \qquad \langle z|w\rangle + \overline{\langle z|w\rangle} \qquad \|w\|^2$

$2\,\mathrm{Re}(\langle z|w\rangle)$

Prop: $|\langle z|w\rangle| \leq \|z\|\cdot\|w\|$ C-S

$\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\|$ triang

Dim: C-S $\quad \langle z|w\rangle = |\langle z|w\rangle|\cdot e^{i\vartheta}$

$$\|t\cdot e^{-i\vartheta}\cdot z + w\|^2 \geq 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\| t e^{-i\vartheta} z\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle t e^{-i\vartheta} z | w\rangle) + \|w\|^2 \geq 0 \quad \forall t$$

$$\|z\|^2\cdot t^2 + 2\,\mathrm{Re}(t e^{-i\vartheta}\cdot|\langle z|w\rangle|\cdot e^{i\vartheta}) + \|w\|^2 \geq 0$$

$$\|z\|^2\cdot t^2 + 2|\langle z|w\rangle|\,t + \|w\|^2 \geq 0 \quad \forall t$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Oss}: \|\lambda\cdot v\| = |\lambda|\cdot\|v\| \\ \langle\lambda v|\lambda v\rangle = \lambda\cdot\bar\lambda\cdot\langle v|v\rangle \\ \|\lambda v\|^2 = |\lambda|^2\cdot\|v\|^2\end{array}}$$

$$\Rightarrow \Delta/4 \leq 0 \qquad |\langle z|w\rangle|^2 - \|z\|^2\cdot\|w\|^2 \leq 0 \ \ldots$$

triang: $\|z+w\|^2 = \|z\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle z|w\rangle) + \|w\|^2$

$\leq \|z\|^2 + 2\,|\langle z|w\rangle| + \|w\|^2 \ \ldots$ ∎

Per eseguire
- ortonormalizzazione
- calcolo di coord.
- proiez. ortog.

l'importante è ricordare che $\langle\cdot|\cdot\rangle$ è lin. a sinistra

G-S: $v_1, \dots, v_k$ base stsp. X di V

$\leadsto u_1, \dots, u_k$ base ortonormale di X

- $u_1 = v_1 / \|v_1\|$

- $$z_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\langle v_{k+1} | u_j \rangle}_{\text{non } \langle u_j | v_{k+1} \rangle} \cdot u_j \qquad u_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\|z_{k+1}\|}$$

voglio che il passaggio dai v_j agli u_j sia lineare (non anti)

Coord / proiez. ortog.

Se $\dim_{\mathbb{C}}(V) < +\infty$, $W \subset V \Rightarrow V = W \oplus W^\perp$

$(W^\perp = \{ v : \langle v | w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \})$

$P_W : V \to W$ proiez. ortog. rispetto a $V = W \oplus W^\perp$

Se $w_1, \dots, w_k$ è base ortogonale di W ho

$$P_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$$

non $\langle w_j | v \rangle$
perché P_W è lin.

(se $W = V$ questa formula dà coord. di v rispetto a $w_1 \dots w_n$)

<u>Def</u>: dato V su $\mathbb{C}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e $f: V \to V$ dico

- f autoaggiunta se $\langle v | f(w) \rangle = \langle f(v) | w \rangle \quad \forall v, w$
- f unitaria se $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle \quad \forall v, w$

<u>Prop</u>: f è proiez. ortog. $\iff$ $f \circ f = f$ e f autoaggiunta.

<u>Oss</u>: $\langle z | Aw \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle A^* z | w \rangle_{\mathbb{C}^m}$

Infatti: $\langle z | Aw \rangle = (Aw)^* \cdot z = w^* \cdot A^* \cdot z = \langle A^* z | w \rangle$

<u>Prop</u>: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ è autoaggiunta rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$
$\iff A^* = A$ (hermitiana).

<u>Cor</u>: A è matrice di una proiez. ortog.
$\iff A^2 = A$, A hermitiana.

<u>Esempio</u>: In $\mathbb{C}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ u \\ w \end{pmatrix} : (1+i)z + 3u - 2iw = 0 \right\}$

Cerco la matrice di P_W.

Noto che $W^\perp$ è retta r, $v = P_W(v) + P_r(v)$

$\Rightarrow P_W(v) = v - P_r(v)$

Equazione: $(1+i, 3, -2i) \cdot \begin{pmatrix} z \\ u \\ w \end{pmatrix} = 0$

$$\left\langle \begin{pmatrix} z\\ u\\ w\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1-i\\ 3\\ 2i\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{C}^3} = 0$$

non $\begin{pmatrix}1+i\\ 3\\ -2i\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow r = W^{\perp} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1-i\\ 3\\ 2i\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_W\begin{pmatrix} z\\ u\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\\ u\\ w\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} z\\ u\\ w\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1-i\\ 3\\ 2i\end{pmatrix}\right\rangle}{1+1+9+4} \cdot \begin{pmatrix}1-i\\ 3\\ 2i\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z\\ u\\ w\end{pmatrix} - \frac{(1+i)z+3u-2iw}{15}\begin{pmatrix}1-i\\ 3\\ 2i\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15}\underbrace{\begin{pmatrix}13 & -3+3i & 2+2i\\ -3-3i & 6 & 6i\\ 2-2i & -6i & 11\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} z\\ u\\ w\end{pmatrix}$$

fatto: $A^2 = A$

$$A^* = A \iff {}^t\bar{A} = A \iff a_{ji} = \overline{a_{ij}} \quad \forall i,j$$

cioè
- sulla diag. princ. ho numeri reali
- i termini simmetrici rispetto a diag. princ. sono coniugati

Oss: non è vero su $\mathbb{C}$ che $\|\cdot\|$ determina $\langle\cdot|\cdot\rangle$

quindi non basta su $\mathbb{C}$ per concludere che

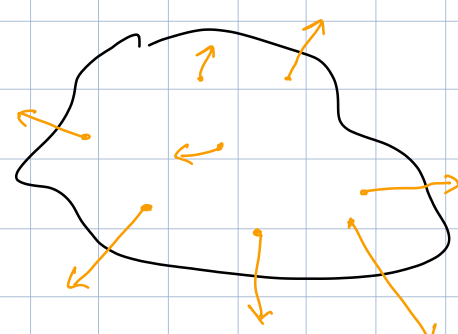
f è unitaria chiedere che preservi $\|\cdot\|$ o dist.

Una unitaria è sempre isometria ma non viceversa.

Oss (dimo circa come su $\mathbb{R}$): $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ è unitaria $\Longleftrightarrow \exists A^{-1} = A^* \Longleftrightarrow$ le colonne sono base ortonormale.

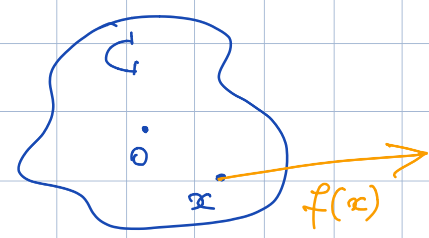
Problema: data $f : V \to V$ appl. lin.
cercare base $\mathcal{B}$ di V t.c.
$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ sia "facile" (con molti 0).

Supponiamo di avere un corpo materiale sottoposto a forze.



Se la risultante di tutte le forze è $\neq 0$ il corpo si sposta; togliendo tale risultante ottengo situazione statica, cioè la forza agente sul centro di massa è 0.

Scelgo coord. con l'origine nel centro di massa.



Sul punto $x \in C$ agisce forza $f(x)$.

Ho supposto $f(0) = 0$. Al primo ordine posso approssimare $f(x)$ con $(d_0 f) \cdot x$.

Dunque ho $T \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ t.c. il punto $x \in C$ è sottoposto alla forza $T \cdot x$.

(T = tensore degli sforzi)

Scrivo $T = S + A$ (proiez. di T rispetto $M_{n\times n} = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$)

simm.

antisimm.

responsabile delle deformazioni

poi

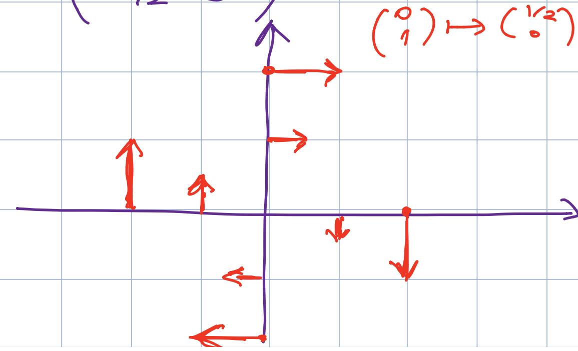
provoca movimento rigido

Nel caso di dim = 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$



⟶ rotazione intorno a O.

Parte simm: supponiamo $S=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} & -1/2\\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3}/2\\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 2\end{pmatrix}$.

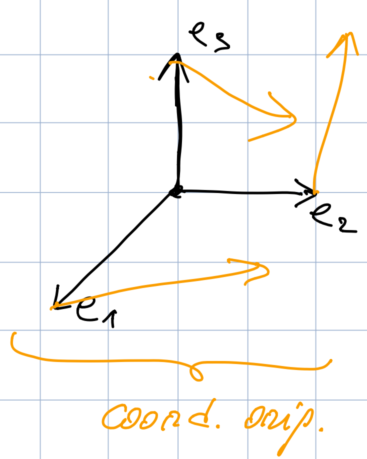
Fatto: se prendo $v_1=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

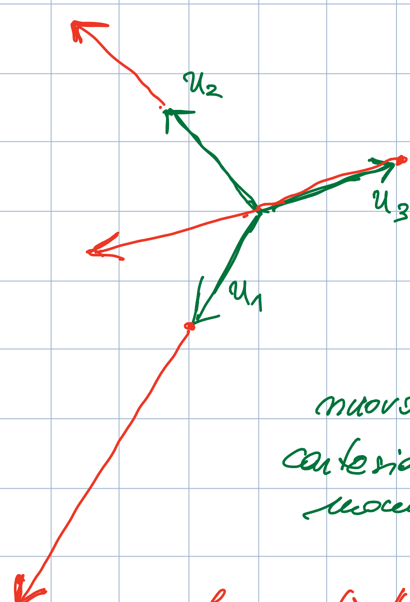
$$S\cdot v_1=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} & -1/2\\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3}/2\\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3+1\\ \sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\\ -1/2-3/2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\sqrt{3}\\ -6\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}=3\cdot v_1$$

$S\cdot v_2=v_2$ $\qquad$ $S\cdot v_3=-2v_3$

Inoltre v_1, v_2, v_3 sono ortog. fra loro dunque prendendo $u_j=\frac{v_j}{\|v_j\|}$ ho base ortonormale u_1, u_2, u_3 t.c.

$$S\cdot u_1=3u_1 \qquad S\cdot u_2=u_2 \qquad S\cdot u_3=-2u_3$$





nuovo sist. di rif. cartesiano ortogonale monometrico

forze dirette come gli assi.

Data $S \in M_{3\times 3}$ abbiamo trovato $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ t.c.

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \text{ è facile: } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Oss: porsi il problema di trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ facile è banale: se $k = \mathrm{rank}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

posso scegliere $w_1, \dots, w_k$ base di $\mathrm{Im}(f)$

$v_1, \dots, v_k$ t.c. $f(v_j) = w_j$

$v_{k+1}, \dots, v_n$ base di $\mathrm{Ker}(f)$

(visto: dim formula dimensione $\underbrace{v_1, \dots, v_n}^{\mathcal{B}}$ base di V)

completando $w_1, \dots, w_k$ a base $\mathcal{C}$ di V ho

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} w_1 \dots w_k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} w_{k+1} \dots w_m \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{v_1, \dots, v_k} \underbrace{\hphantom{xxxxx}}_{v_{k+1} \dots v_n} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ di f vedo solo il rango.

Resta il problema di cercare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ "facile".