

Algebra Lineare 31/10/18

fisso: $V = W \oplus Z$, p, q proiezioni

$$\Rightarrow p \circ p = p, \quad W = \text{Im}(p), \quad Z = \text{Ker}(p).$$

Prop: se $p: V \rightarrow V$ è lineare e $p \circ p = p$
allora p è una proiett. associata e
una decomposizione $V = W \oplus Z$.

Dica: Porqo $W = \text{Im}(p)$, $Z = \text{Ker}(p)$; devo ver se
de $V = W + Z$, $W \cap Z = \{0\}$ e de p é lo
projez! anoc.

$$\bullet \quad v = \underbrace{p(v)}_{\substack{\cap \\ \text{Im}(p)}} + \underbrace{(v - p(v))}_{\text{Ker}(p)}$$

$$\begin{aligned} p(v - p(v)) &= p(v) - (p \circ p)(v) \\ &= p(v) - p(v) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v - p(v) \in \text{Ker}(p)$$

$$\bullet \quad v \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) \Rightarrow v = p(u)$$

$$\Rightarrow p(v) = (p \circ p)(u) = p(u) = v$$

$$\parallel$$

$$0$$

$$\Rightarrow \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0\}$$

$$v = p(v) + (v - p(v))$$

$\Rightarrow$ proiezione $\tilde{e}$ p .



Cor: Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.c. $A \cdot A = A$
 allora f_A è la proiezione associata a $\mathbb{R}^n = W \oplus Z$.

$$\mathcal{L}(V, W) = \{ f : V \rightarrow W \text{ lineare} \}$$

è uno sp. vett.

Prop: $M_{m \times m}(\mathbb{R}) \xrightarrow{A \mapsto I_A} \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

è lineare biettiva.

Dimo: lineare: visto ieri.

Biettiva: basta vedere che $\text{Ker} = \{0\}$.

Cioè che se f_A è l'applicazione nulla allora
 A è per $A = 0$. Infatti

$$f_A = 0 \iff f_A(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\iff A \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se $A \neq 0$
 allora:

$$j \begin{pmatrix} \vdots \\ i \\ \vdots \\ \boxed{\neq 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ i \\ \vdots \\ \boxed{\neq 0} \\ \vdots \end{pmatrix} j : \text{arrando.}$$

$\vdots = e_i$

Suppletive: sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; cerco A t.c.
 $f = f_A$. Osservo che (argomento oppure $f(0)$):

$$A \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

i -esima colonna
di A .

Quindi se A t.c. $f_A = f$
 esiste necessariamente la i -esima colonna di A

$\bar{e} \quad A \cdot e_i = f_X(e_i) = f(e_i)$. Quindi devo prendere la matrice la matrice A la cui i -esima colonna sia $f(e_i)$; cioè siamo

$$f(e_i) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(e_i^{(m)}) = \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j^{(m)} \quad c$$

definisco A come la matrice $m \times n$ t.c.

$(A)_{ji} = a_{ji}$. Affresco che $f_X = f$ cioè

$\text{cio } f_A(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
(lo so già^c per $x = e_i^{(n)}$).

$$f(x) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i^{(n)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i^{(n)}) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j^{(n)}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) e_j^{(n)}$$

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{(A \cdot x)_i}^{\text{red}} \\
 &= \sum_{j=1}^m (A \cdot x)_j \cdot e_j^{(m)} = A \cdot x = f_A(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Grazie a quanto fatto scrivere spesso
solo A invece di f_A .

Es: consideriamo $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$
il cui valore su $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ è
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Ricordo: $f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$ dunque sapendo

A invece di f_A la composizione tra applicaz.
si traduce nel prodotto tra matrici.

Se ho V, W di dim n, m posso fissare
una base B di V che identifica V a $\mathbb{R}^n$,
una base C di W che identifica W a $\mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow L(V, W)$ è identificato a $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = M_{m \times n}$

$\Rightarrow L(V, W)$ ha $\dim = m \cdot n$

Esplícito tale identificazione:

Da $f \in \mathcal{L}(V, W)$ passo a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 \downarrow [\cdot]_B & & \downarrow [\cdot]_C \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{[\cdot]_C \circ f \circ [\cdot]_B^{-1}} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Cioè :

$$\mathcal{L}(V, W) \xrightarrow{f \mapsto [\cdot]_C \circ f \circ [\cdot]_B^{-1}} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \xrightarrow{g \mapsto A} M_{m \times n}$$

A è la matrice
che ha come
i-esima colonna $g(e_i)$

Quindi $L(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}$

è l'applicazione che manda f nella matrice
che ha come i-esima colonna $([\cdot]_e \circ f \circ [\cdot]_B^{-1})(e_i) =$

$$= \left[f \left(\underbrace{[\cdot]_B^{-1}(e_i)}_{\text{chi } e_i?} \right) \right]_e$$

Se $B = (v_1, \dots, v_m)$ cerco il vettore v t.c.
 $[v]_B = c_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i$

$$\Rightarrow v = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_m = v_i$$

Mappe: $\mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}$
 $\mathcal{L} \longmapsto$ la matrice che ha
come i -esima colonna

le coord. rispetto a $\mathcal{C}$
di $f(v_i)$
($v_i = i$ -esimo el. di $\mathcal{B}$)

Chiamo tale matrice, matrice associata a f
rispetto alle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo.
e la indico con $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Oss: " $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ sono le coordinate di f
rispetto a $\mathcal{B}$ in part. e $\mathcal{C}$ in arrivo."

Oss: da $A \in M_{m \times n}$ si ottiene unico
 $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ data da $f_A(x) = A \cdot x$.

Queda da $f \in \mathcal{L}(V, W)$ si ottengono
• $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in M_{m \times n}$ diverse a secondo di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Example: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 7x_2 - 9x_3 \end{pmatrix}$

$$B = \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

No
Basis

$$C = \left(\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$[f]_{CB}^C = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}.$$

Tale matrice è quella che nella colonna i ha le coordinate rispetto a w_1, w_2 di $f(e_i)$.

$$\text{I colonna: } f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 31 \\ -48 \end{pmatrix} = \frac{127}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{113}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \left(31 + \frac{226}{5} \right) = \frac{155 + 226}{15} = \frac{381}{15} =$$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 127/5 & \cdot & \cdot \\ -113/5 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

4 colonne: $f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix} = -\frac{27}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{73}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda = -20 + \frac{73}{5} = -\frac{27}{5}$$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 127/5 & -27/5 & 0 \\ -113/5 & 73/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Verfahren Gaußmann.

4.5.3

$$V = \mathbb{R}^4$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$Z: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 7 \\ -\alpha + 5\beta &= -1 \end{aligned}$$

$$\beta = 3/4$$

$$\alpha = 7 - 9/4 = 19/4$$

$$3 \cdot \frac{19}{4} + \frac{3}{4} = -1 \quad \underline{N_p}$$

$$\Rightarrow \dim W = 3$$

$$\dim Z = 4 - 2 = 2$$

$$3 + 2 = \dim(W \cap Z) + \dim(W + Z)$$

$\begin{matrix} 2? & 3? \\ 1! & 4? \end{matrix}$

Cerco gli el. di $W \cap Z$ cioè le comb. lin.
dei gen. di W che soddisfanno le eq. di Z :

cioè i vettori del tipo

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

che soddisfanno ...

$$\begin{cases} 2(t_1 + 3t_2 + 7t_3) + (2t_1 - 4t_2 + 2t_3) - 3(-t_1 + 5t_2 - t_3) \\ \quad + 5(3t_1 + t_2 - t_3) = 0 \\ 3(t_1 + 3t_2 + 7t_3) - (2t_1 - 4t_2 + 2t_3) + 2(-t_1 + 5t_2 - t_3) \\ \quad + (3t_1 + t_2 - t_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22t_1 - 8t_2 + 14t_3 = 0 \\ 2t_1 + 24t_2 + 16t_3 = 0 \end{cases}$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$Z : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = -12t_2 - 8t_3 \\ -132t_2 - 88t_3 - 4t_2 + 7t_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 136t_2 + 81t_3 = 0 \\ t_1 = \dots \end{cases}$$

Solut.: $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 12 \cdot 81 - 2 \cdot 136 \\ -81 \\ 136 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W \cap Z$ ha dim 1 generata da

$$(\dots) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 81 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 136 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se accetto Gramman concludo che $W + Z = \mathbb{R}^4$.

Se volessi verificarlo : trovo 2 generatori w_1, w_2
di W
e verifico che insieme ai 3 di V generano $\mathbb{R}^4$

v_1, v_2, v_3, w_1, w_2
OK OK OK OK ~~w_2~~

4.5.5

$$V = \mathbb{R}^5$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$Z: \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\dim W = 2$$

$$\dim Z = 5 - 2 = 3$$

$$2 + 3 = \underbrace{\dim W \cap Z}_2 + \underbrace{\dim (W + Z)}_3$$

$$W \cap Z: \begin{cases} 0 \cdot (2t+5x) + (t+2n) + (-t-n) - (3t+n) + (4t-n) = 0 \\ (2t+5n) - (t+2n) + 3(-t-n) - (3t+n) + 2(4t-n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t - n = 0 \\ 3t - 3n = 0 \end{cases}$$

$$t = n$$

$$\begin{pmatrix} t \\ n \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim W \cap Z = 1 \quad \text{generiert von} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \text{Grassman: } \dim W + Z = 4$$

Per verificare: esiste basi z_1, z_2, z_3 di Z

w_1, w_2, z_1, z_2
OK OK OK OK

~~z_3~~

————— 0 —————

Provare che l'app. data $\bar{z}$ lineare e
trovare Ker, Im .

5.1.2 b

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

lineaire: le composant de $f(x)$ sous pol. omop.
de I gère une composant de x

Ker: $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4x_1 + 3x_2 \\ 27x_1 + 11x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -27 \\ -37 \end{pmatrix}$$

Ho provato che $\ker(f) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 11 \\ -27 \\ -37 \end{pmatrix} \right)$; $\dim = 1$.

Th: Se $f: V \rightarrow W$ è lineare e $v_1, \dots, v_n$ è base di V allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\text{Im}(f)$:

$$\begin{aligned}
\text{Im}(f) &= \{ f(v) : v \in V \} \\
&= \{ f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) : \alpha \in \mathbb{R}^n \} \\
&= \{ \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) : \alpha \in \mathbb{R}^n \}.
\end{aligned}$$

Quindi se $f = f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m \times n}$

$\text{Im}(f)$ è generato da $f(e_1), \dots, f(e_n)$
 $\Rightarrow \text{Im}(f_A)$ è generato dalle colonne di A .

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Note that $f = f_A$ with $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{Im}(f) \bar{=}$ generated by $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$





$\Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \quad \dim = 2.$

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \underbrace{\dim(\ker f)}_1 + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_2$$

[c] $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2 + 11x_3 \end{pmatrix}$

$f = f_A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{lin}}$

Ker f :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -11x_3 \\ 2x_1 - 12x_3 = 0 \\ 3x_1 - 18x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6x_3 \\ x_2 = -11x_3 \end{cases}$$

$$x = k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \dim = 1$$

$$(\Rightarrow \dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^3) - 1 = 3 - 1 = 2.)$$

Verifico:

Inf gerada de

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$