

Esercitazione 31-10-18

Verificare che l'applicazione lineare assegnata è lineare, esibire nucleo e immagine verificando la formula della dimensione.

5.1.2. (c.)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

è lineare perché
le coordinate
sono polinomi
omogenei di 1° grado
in x_1, x_2, x_3 .

• $\text{Ker}(f)$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f)$ e le coordinate x_1, x_2, x_3

sono soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_3 = x_1 + x_2$$

$$3x_1 + 4x_2 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 = 0$$

- sostituendo
 $x_3 = x_1 + x_2$ nelle
altre equazioni

Quindi $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f)$

$$x_1 = 4, x_2 = -3$$

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 1.$$

2n generate

$$\circ \text{Im}(f): f: V \rightarrow W \quad \text{Base } B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ di } V$$

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}).$$

Prendiamo la base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Im}(f) = \text{Span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_3} \right\}$$

$$w_i = f(e_i) \\ i = 1, 2, 3$$

• w_1, w_2 sono linearmente indep.

$$w_3 \in \text{Span}(\{w_1, w_2\})$$

Poiché $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f)$, segue che $4 \cdot w_1 - 3w_2 + w_3 = 0$

quindi $w_3 = 3w_2 - 4w_1.$

Quindi una base di $\text{Im}(f)$ è $\{w_1, w_2\}$.

Quindi $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(\mathbb{R}^3) & = & \dim(\text{Im}(f)) & + & \dim(\text{Ker}(f)) & \square \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 3 & & 2 & & 1 & & \end{array}$$

$$(i) f: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$f(A) = A + {}^t A.$$

◦ Verificare che è lineare (Usare che $1 \cdot \overset{\text{matrice nulla}}{0} = 0$)

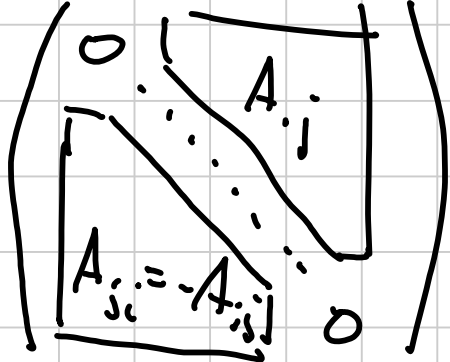
$$2) \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$$3) \quad {}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$$

◦ Descriviamo $\text{Ker}(f)$:

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), A \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(A) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A + {}^t A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = -{}^t A, \Leftrightarrow A \text{ antisimmetrica}$$

A antisimmetrica $A =$ 

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

• $\text{Im}(f)$. $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

Osservazione: $B \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow B = \overline{B^t}$, cioè B simmetrica

Dim: $\Rightarrow B \in \text{Im}(f)$, allora $\exists A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$B = A + {}^t A, \text{ allora } {}^t B = {}^t(A + {}^t A) = {}^t A + ({}^t({}^t A)) = {}^t A + A = A + {}^t A$$

$\Leftarrow$ dimostriamo che se $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$B = \overline{B^t}, \text{ allora } \exists A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ tale che } B = A + {}^t A$$

$B = \overline{B^t}$ è equivalente a dire che $B_{ij} = B_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$

Definiamo A tale che $A + {}^t A = B$.

$$A_{ij} = \begin{cases} B_{ij} / 2 & \text{se } i=j \\ B_{ij} & \text{se } j > i \end{cases}$$

— coefficienti "sopra" la diagonale
o altrimenti.

$$A = \begin{pmatrix} B_{11}/2 & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & B_{22}/2 & B_{23} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_{nn}/2 \end{pmatrix}$$

Verificare che $A + A^t = B$.

Quindi: $\text{Im}(f) = \{B \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid B = B^t\}$ - matrici
simmetriche

• Formula della Dimensione

$\dim(M_{n \times n}(\mathbb{R})) = n^2$ - Base $\bullet \{E_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$

$$(E_{ij})_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=i, k=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{--- riga } i \\ \text{colonna } j \end{array}$$

$$\dim(\text{Ker}(p)) = \dim(\{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Antisimmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{n^2 - n}{2}$ coefficienti "sopra" la diagonale

Base e $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \textcircled{1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\textcircled{-1}$ riga j
 colonna i

$\textcircled{1}$ riga i, colonna j

$\frac{n^2-n}{2}$ matrici di questo tipo

• $\text{Im}(f) =$ matrici simmetriche

Esibire una base e verificare che la dimensione

$$\text{e' } n^2 - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2-n}{2} + n$$

i

1