

Algebra lineare 30/10/18

$$\begin{matrix} A & \cdot & B \\ n \times m & & m \times k \end{matrix} \quad (A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^m (A)_{il} \cdot (B)_{lj}$$

- lineare a sin e $\perp x$
- associativo.

Funzione δ di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Base canonice di $\mathbb{R}^h$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots$

dunque: $(e_i)_j = \delta_{ij}$ -

$\forall m \in \mathbb{N}$ diamo matrice identità $I_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
 $\in M_{m \times m}$

guardi: $(I_m)_{ij} = \delta_{ij}$.

Prop: $I_m \cdot A = A \quad A \cdot I_m = A$

$m \times m$ $m \times m$

(Si comporta da elemento unità per il prodotto righe ~~col.~~ x col.)

Dimo: $I_m \cdot A \neq A$

$m \times m \cdot m \times m$ $m \times m$

↖ ↗

⏟

$m \times m$



$$(I_m \cdot A)_{ij} = \sum_{l=1}^m \underbrace{(I_m)_{il}}_{\delta_{il}} \cdot (A)_{lj} = 1 \cdot (A)_{ij} = (A)_{ij}. \quad \square$$

Def: indico con $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f: V \rightarrow W$ lineari.

Def: data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ chiamo applicazione lineare associata ad A la

$f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ dato da

$$f_A(x) = A \cdot x$$

$$\begin{array}{cc} m \times m & m \times 1 \\ \uparrow & \uparrow \\ \underbrace{\hspace{10em}} & \\ m \times 1 \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

inoltre sappiamo che $\text{prod righe} \times \text{col.}$ è lin. e dx

$\Rightarrow f_A$ è lineare.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}$

$$f_A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} f_A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + (-2)(-4) \\ 5 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 9(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

①ss: (1) $f_{I_m} = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ $\left(f_{I_m}(x) = I_m \cdot x = x \right)$

(2) $f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$

$\left(f_{A \cdot B}(x) = (A \cdot B) \cdot x = A \cdot (B \cdot x) \right)$

$= A \cdot f_B(x) = f_A(f_B(x)) = (f_A \circ f_B)(x).$

Somma diretta

Def: se V è sp. vett. e W, Z sono sottospazi dico che sono in somma diretta, e scrivo $V = W \oplus Z$ se $W \cap Z = \{0\}$ e $W + Z = V$.

Oss: se $\dim(V) < +\infty$:

$$\dim(W) + \dim(Z) = \underbrace{\dim(W \cap Z)}_{\{0\}} + \underbrace{\dim(W + Z)}_{\hat{V}}$$

$$\Rightarrow \dim(V) = \dim(W) + \dim(Z) \quad \text{se } V = W \oplus Z.$$

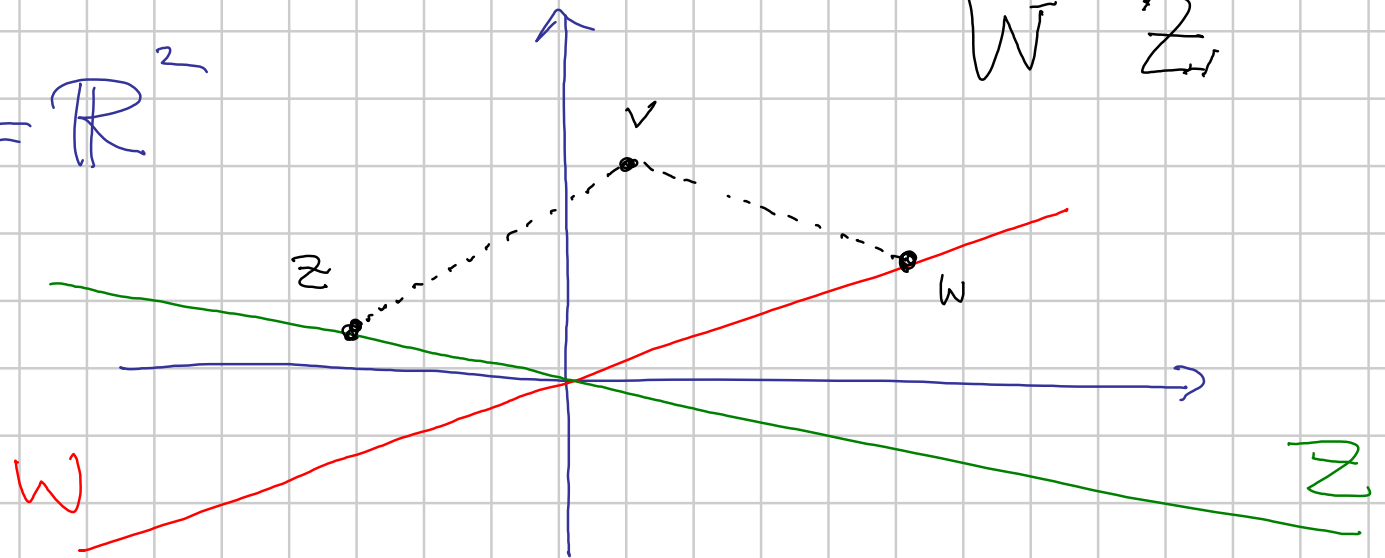
Viceversa : se so che $\dim(W) + \dim(Z) = \dim(V)$
allora

$$W \cap Z = \{0\} \iff W + Z = \hat{V}$$

($\frac{1}{2}$ def. $\perp \oplus \Rightarrow$ tutte le dim. sono giuste)

Prop: se $V = W \oplus Z$ ogni $v \in V$ si scrive
 in modo unico come $v = \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{w} + \underset{\substack{\uparrow \\ Z}}{z}$.

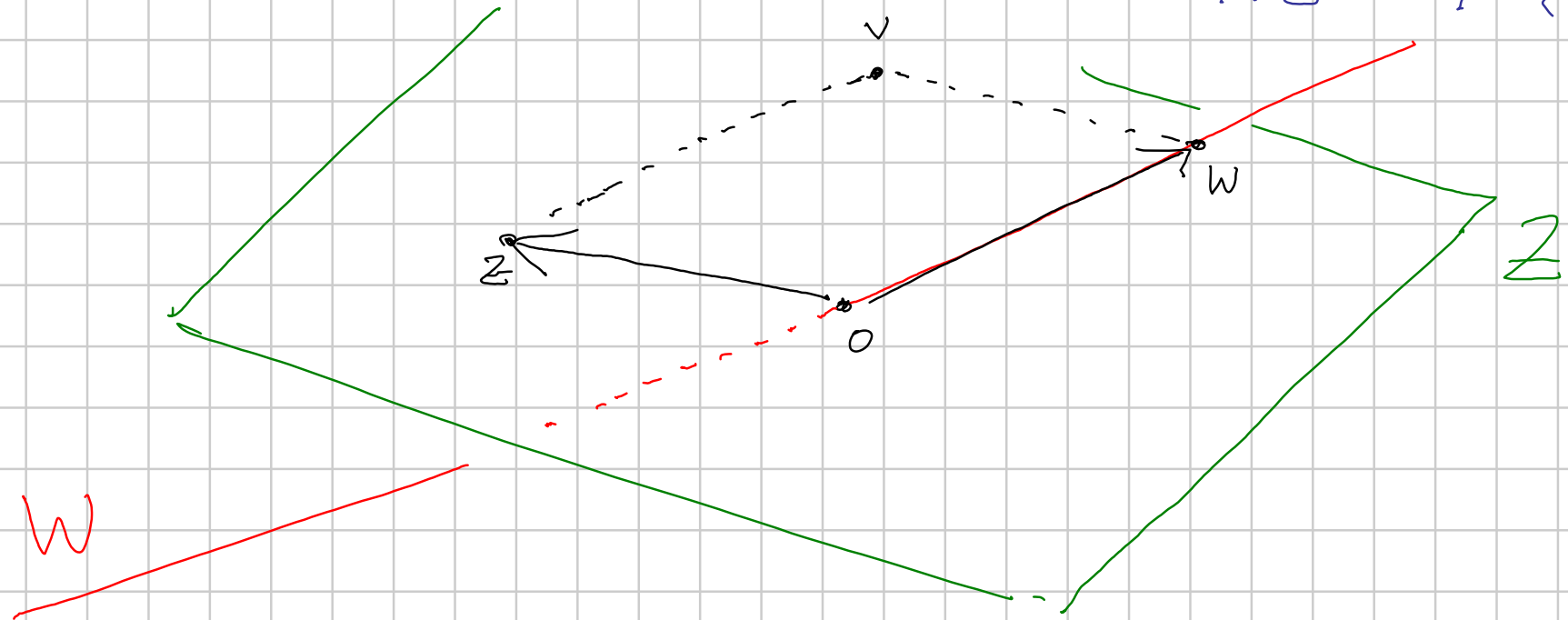
Esempio: $V = \mathbb{R}^2$



Esempio: $V = \mathbb{R}^3$

$$\dim(W) = 1 \quad \dim(Z) = 2$$

$$W \cap Z = \{0\}$$



Dimo: so che $W+Z = \{w+z : w \in W, z \in Z\}$.

Siccome $W+Z = V$, ogni v si scrive come $v = w+z$.

Unicità: $v = w_1 + z_1 = w_2 + z_2$; h.

$$\underbrace{w_1 - w_2}_{\substack{\uparrow \\ W}} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\substack{\uparrow \\ Z}}$$

$$\Rightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1 \in W \cap Z = \{0\}$$

$$\Rightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1 = 0 \Rightarrow w_2 = w_1, z_2 = z_1. \quad \square$$

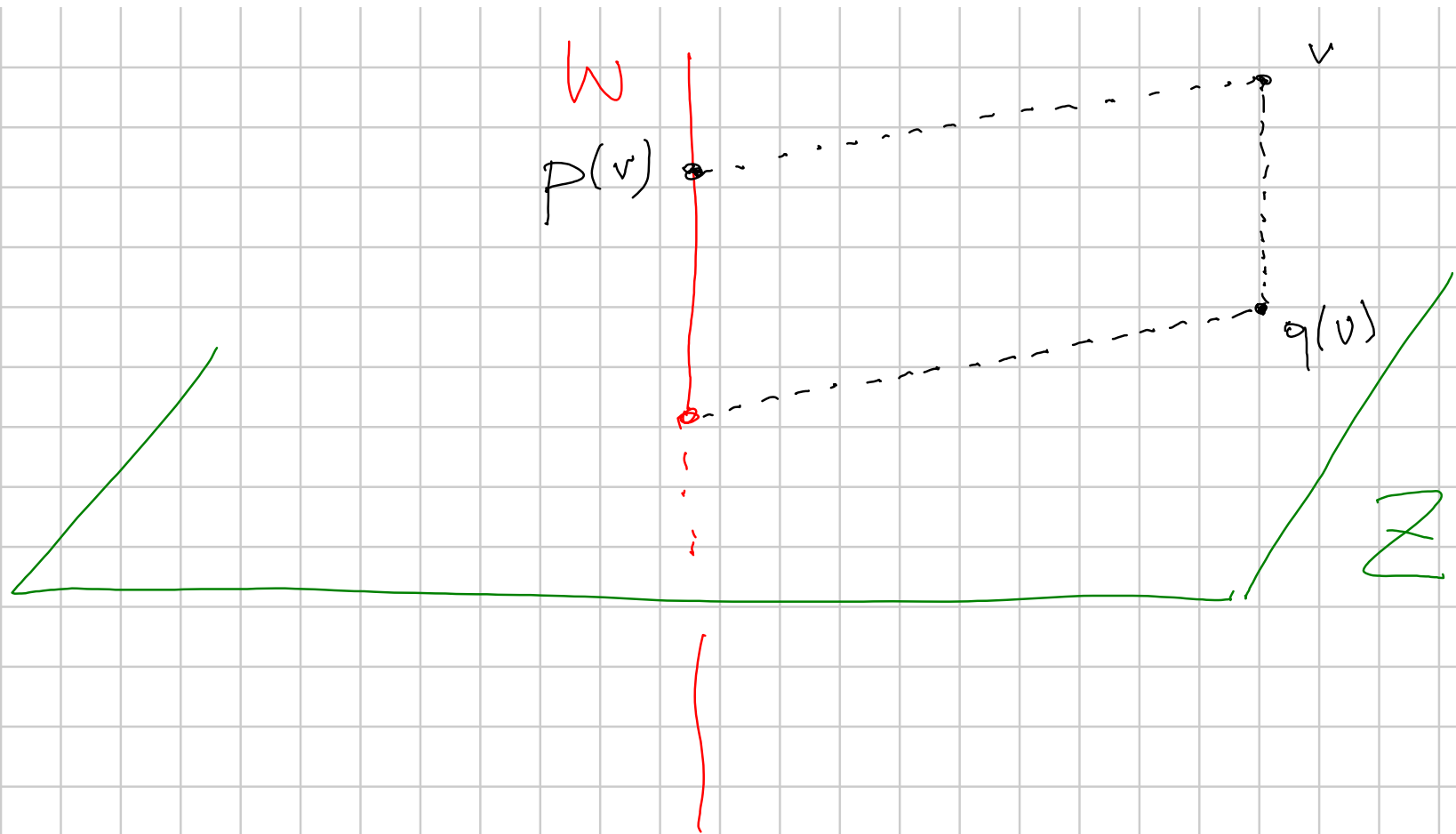
Def: data la decomposizione in somme dirette

$$V = W \oplus Z \quad \text{chiamo } p: V \rightarrow V, \quad q: V \rightarrow V$$

proiezioni associate alla $V = W \oplus W$ le

funzioni con definite: se $v = w + z$ posto

$$p(v) = w \quad \text{e} \quad q(v) = z.$$



Prop: tali p e q associate a $V = W \oplus Z$
sono lineari.

Dico: devo vedere che $p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 p(v_1) + \lambda_2 p(v_2)$
 $q(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 q(v_1) + \lambda_2 q(v_2)$.

Chiamo $p(v_1) = w_1$, $q(v_1) = z_1$, $p(v_2) = w_2$, $q(v_2) = z_2$
cioè:

$$v_1 = w_1 + z_1, \quad w_1 \in W, \quad z_1 \in Z$$

$$v_2 = w_2 + z_2, \quad w_2 \in W, \quad z_2 \in Z$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_W + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_Z$$

$$\Rightarrow \exists (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \dots q(\dots) = \dots \quad \square$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$ $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0\}$
 $Z = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$\dim W = 2, \quad \dim Z = 1$$

$$W \cap Z : 7 \cdot 5 - 9 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 13 \neq 0$$

$$\Rightarrow W \cap Z = \{0\}$$

$$2 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus Z$$

Cerco P, q. Dato $x \in \mathbb{R}^3$ devo riuscire a scriverlo come $x = w + z$
 $w \in W, z \in Z$.

Necessariamente avremo $z = t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;
inoltre $x - z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = w \in W$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 5t \\ x_2 - 2t \\ x_3 + t \end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione di W .

$$\text{Ans} \quad 7(x_1 - 5t) - 9(x_2 - 2t) + 4(x_3 + t) = 0$$

$$7x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 35t - 18t - 4t$$

$$t = \frac{1}{13} (7x_1 - 9x_2 + 4x_3)$$

$$\Rightarrow q(x) = \frac{1}{13} (7x_1 - 9x_2 + 4x_3) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 35x_1 - 45x_2 + 20x_3 \\ 14x_1 - 18x_2 + 8x_3 \\ -7x_1 + 9x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 35 & -45 & 20 \\ 14 & -18 & 8 \\ -7 & 9 & -4 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$p(x) = w = x - z =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 35x_1 - 45x_2 + 20x_3 \\ 14x_1 - 18x_2 + 8x_3 \\ -7x_1 + 9x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -22 & 45 & -20 \\ -14 & 31 & -8 \\ 7 & -9 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Prop: se P, q sono le proiezz. associate a $V = W \oplus Z$:

$$1) \quad W = \text{Im}(P) = \text{Ker}(q), \quad Z = \text{Im}(q) = \text{Ker}(P)$$

$$2) \quad P(v) + q(v) = v \quad \forall v \in V$$

$$3) \quad P \circ P = P \quad q \circ q = q \quad P \circ q = 0 \quad q \circ P = 0.$$

Dimo: (1) $\text{Im}(p) \subset W$ poiché $v = p(v) + q(v)$.

$\uparrow$
 W

$\uparrow$
 $\mathbb{Z}$

Viceversa se $w \in W$ ho $w = w + 0$

$\uparrow$
 W

$\uparrow$
 $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow p(w) = w \Rightarrow v \in \text{Im}(p)$.

$\text{Ker}(p) = \mathbb{Z}$; ovvio che $\text{Ker}(p) \subset \mathbb{Z}$: se $v \in \text{Ker}(p)$

$$\text{ho } v = p(v) + q(v) \implies v \in \mathbb{Z}.$$

$\parallel$
 0

$\Downarrow$
 $\mathbb{Z}$

Viceversa se $z \in \mathbb{Z}$ devo scrivere $z = 0 + z$
 $\implies p(z) = 0$ -

$\Downarrow$
 $\mathbb{W}$

$\Downarrow$
 $\mathbb{Z}$

Analoghe per q .
 (2) Per def.

(3) Se $v \in V$ ho $p(v) \in W$

ma ho visto che $p(w) = w \quad \forall w \in W$
 $q(w) = 0 \quad \forall w \in W$

$$\Rightarrow p(p(v)) = p(v)$$

$$\Rightarrow p \circ p = p$$

$$q(p(v)) = 0$$

$$\Rightarrow q \circ p = 0.$$

Analogaente

$$q \circ q = q$$

$$p \circ q = 0.$$



Esempio (precedente continuo):

Visto che $p = f_P$

$$P = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -22 & 45 & -20 \\ -14 & 31 & -8 \\ 7 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

e che $q = f_Q$

$$Q = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 35 & -45 & 20 \\ 14 & -18 & 8 \\ -7 & 9 & -4 \end{pmatrix} \cdot x$$

Per vedere che $p \circ p = p$ verifico che

$$f_P \circ f_P \stackrel{?}{=} f_P$$

$$\parallel$$

$$f_{P \cdot P}$$

$\Rightarrow$ basta vedere che

$$P \cdot P = P.$$

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -22 & 45 & -20 \\ -14 & 31 & -8 \\ 7 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -22 & 45 & -20 \\ -14 & 31 & -8 \\ 7 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 484 - 630 - 140 & -990 + 1395 - 180 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -286 & -225 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -22 & 45 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Andopamento

verifico che $f \circ g = 0$ provando che $\underline{D} \cdot Q = 0$
" " $g \circ f = 0$ " " $Q \cdot \underline{D} = 0$
" " $g \circ g = g$ " " $Q \cdot Q = Q$.

Esempio: $V = M_{m \times m}(\mathbb{R})$
 $\underline{I}_m = \{A \in V : {}^t A = A\}$
 $\underline{Q}_m = \{A \in V : {}^t A = -A\}$

Affermo che $M_{m \times m} = I_m \oplus Q_m$
ed esibisco le associate proiezioni.

Basta vedere che

$$\begin{aligned} \bullet \quad \dim(I_m) + \dim(Q_m) &= \dim(M_{m \times m}) \\ \parallel &\quad \parallel &\quad \parallel \\ \frac{n(n+1)}{2} &\quad \frac{n(n-1)}{2} &\quad n^2 \end{aligned} \quad \checkmark$$

$$\bullet \quad I_m \cap Q_m = \{0\} \quad \checkmark$$

Dato $M \in M_{n \times n}$ cerchiamo $S = p(M)$, $A = q(M)$;
dobbiamo avere:

$$\begin{aligned} M &= S + A & {}^t S &= S & {}^t A &= -A \\ {}^t M &= S - A \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$$

$$A = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$$

Obs: visto che $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ X insieme è sp. vett.
con
$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x).$$

Obs: se $\bar{W}$ è sp. vett. e X insieme allora
 $\mathcal{L}(X, \bar{W})$ è sp. vett. con

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

Obs: se p, q sono le proiezioni associate
a $V = W \oplus Z$ le proprietà

$$p(v) + q(v) = v \quad \forall v \in V$$

equivalente a $(p + q)(v) = v \quad \forall v \in V$

ovvero a $(p + q)(v) = \text{id}_V(v) \quad \forall v \in V$

Ovvero $P + Q = \text{id}_V$.



Consideriamo uno sp. vett. V, W .

So che $\mathcal{L}(V, W)$ è sp. vett. (non serve V sp. vett.)

Quello ha $\mathcal{L}(V, W) \subset \mathcal{L}(V, W)$
"
le appl. lineari

Prop: $\mathcal{L}(V, W)$ è sp. vett. di $\mathcal{F}(V, W)$.

cioè: "facendo una comb. lin. di appl. lineari trova una appl. lineare"

Dimo: siano $f_1, f_2: V \rightarrow W$ lineari; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Devo vedere che $k_1 f_1 + k_2 f_2$ è lineare.

Infatti:

$$(k_1 f_1 + k_2 f_2)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$

$$= k_1 f_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + k_2 f_2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$

$$= k_1(\alpha_1 f_1(v_1) + \alpha_2 f_1(v_2)) + k_2(\alpha_1 f_2(v_1) + \alpha_2 f_2(v_2))$$

$$= \alpha_1(k_1 f_1(v_1) + k_2 f_2(v_1)) + \alpha_2(k_1 f_1(v_2) + k_2 f_2(v_2))$$

$$= \alpha_1 \cdot (k_1 f_1 + k_2 f_2)(v_1) + \alpha_2 \cdot (k_1 f_1 + k_2 f_2)(v_2).$$



Problema: capire la struttura di sp. vet.
di $\mathcal{L}(V, W)$ -

Teorema: l'applicazione

$$M_{m \times m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

$$A \longmapsto f_A$$

è lineare bigettiva -

Cioè: "le appl. lin. da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^m$
sono esattamente le matrici $M_{m \times m}$ "

Cioè: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \cong M_{m \times m}(\mathbb{R})$

Dimo: lineare $f_{k_1 A_1 + k_2 A_2} \neq k_1 f_{A_1} + k_2 f_{A_2}$
 $f_{k_1 A_1 + k_2 A_2}(x) \neq (k_1 f_{A_1} + k_2 f_{A_2})(x) \quad \forall x$

$$(k_1 A_1 + k_2 A_2)(x) \neq k_1 f_{A_1}(x) + k_2 f_{A_2}(x) \quad \forall x$$

$$k_1 A_1 \cdot x + k_2 A_2 \cdot x \neq k_1 A_1 \cdot x + k_2 A_2 \cdot x \quad \forall x$$

Σ