

Algebra linear 28/11/18

Prop: $\Leftrightarrow E = x_0 + W$, $F = y_0 + Z$ $\Rightarrow$ s.t.s p. off $\perp V$
 $\Leftrightarrow E \cap F = \emptyset$ allora $\dim(E + F) = \dim(W + Z) + 1$.



D'isso: posto $U = \text{Span}(y_0 - x_0) + (W + Z)$ s.t. sp. vet.
 $T = x_0 + U$ s.t. sp. off.

Affirmo che (1) $y_0 - x_0 \notin W + Z \Rightarrow \dim U = \dim(W + Z) + 1$

$$(2) \quad E + F = T.$$

Quanto basta. Verifico:

(1) Se p.e. $y_0 - x_0 = w + z$ allora

$$x_0 + w = y_0 - z$$

$$\underbrace{\quad}_{\cap} \\ E$$

$$\underbrace{\quad}_{\cap} \\ F$$

$$\Rightarrow E \cap F \neq \emptyset; \text{No.}$$

(2) • T is a subspace.

• T contains $x_0 + W = E$

$$(T = x_0 + \text{span}(y_0 - x_0) + (W + Z))$$

• T contains $x_0 + y_0 - x_0 + Z = y_0 + Z$

• So $S = x_0 + R$ is a subspace.

due contains $E \cup F$ has:

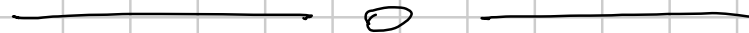
$$S \supset E \Rightarrow x_0 + R \supset x_0 + W \Rightarrow R \supset W$$

$$S \ni y_0 \Rightarrow x_0 + R \ni y_0 \Rightarrow y_0 - x_0 \in R$$

$$S \supset F \Rightarrow S = y_0 + R \supset y_0 + Z \Rightarrow R \supset Z$$

$$\Rightarrow R \supset U$$

$$\Rightarrow S \supset \overline{U}$$



ReHe nel piano

presenter. cart: $ax + by = c$ a, b non entrambi nulli

presenter. param: $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \text{span} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ α, β non entrambi nulli

cart $\leadsto$ param:

pto base: se $a \neq 0$

& $b \neq 0$

slope: $\frac{c}{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c/a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c/b \end{pmatrix}$$

generatore fissatura: $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

dunque: $\frac{c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

param $\rightarrow$ cart

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\beta x - \alpha y = 0$$

equaz. euclidea delle
fissature

$$\beta x - \alpha y = \beta x_0 - \alpha y_0.$$

rette nello spazio

presentare param: $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \text{Span} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

α, β, γ non tutti 0

presentare cart

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

con $\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$

avē almeno uno dei

$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ non 0.

param non cont.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \text{Span} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Cerco 2 eq. omogenee per ricavare
- scelgo i termini noti imponendo per esempio $x=1$ o $y=1$ o $z=1$

$$\begin{cases} \beta x - \alpha y = 0 \\ \gamma x - \alpha z = 0 \\ \gamma y - \beta z = 0 \end{cases}$$

Sono tre equazioni ma

$$\begin{pmatrix} \beta & -\alpha & 0 \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ 0 & \gamma & -\beta \end{pmatrix}$$

ha $\det = -\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma = 0$
e ha soluzioni non triviali

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

con det $\alpha^2, \gamma^2, -\beta^2$
non tutti nulli.
 $\Rightarrow \text{rank} = 2$

$\Rightarrow$ in realtà
equivale a 2 equazioni.

$$\begin{cases} \beta x - \alpha y &= \beta x_0 - \alpha y_0 \\ \gamma x - \alpha z &= \gamma x_0 - \alpha z_0 \\ \gamma y - \beta z &= \gamma y_0 - \beta z_0 \end{cases}$$

Cart in 2 param.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

con $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$
non tutti 0.

Serve:

→ una soluz. part (probare)

→ un parametro della giacitura.

Pto base: se $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ cerco pto base con $z_0 = 0$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = d_1 \\ a_2 x + b_2 y = d_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

(analogamente se $c \neq 0$
uno degli altri)

Generatore primitivo:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

Carichiamo i due solen, con nulla

$$\underline{Oss} : \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0 = \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \left(-\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} \right) + c_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_2 \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \left(-\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} \right) + c_2 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ posso perdere

$$\begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -(a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

(ho almeno una componente non nulla
per l'ipotesi che le 2 spazi. fossero lin. indep.)

E_S :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 7x + 2y - 6z = 3 \end{cases}$$

Soluz. part con $\alpha = 0$

$$\begin{cases} -5y + 3z = 0 \\ 2y - 6z = 3 \end{cases}$$

$$y = -3/8 \quad z = -1/8$$

pts base $\begin{pmatrix} 0 \\ -3/8 \\ -1/8 \end{pmatrix}$.

generatore prattica:

$$\begin{pmatrix} (-5) \cdot (-6) - 2 \cdot 3 \\ -(2 \cdot (-6) - 7 \cdot 3) \\ 2 \cdot 2 - 7 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$\sim D \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Piani nello spazio

presenter. param $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right)$

con $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ lin. indep, cioè

$\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$ cioè numero max dei

$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \neq 0$

permutat. cart.:

$$ax + by + cz = d$$

con a, b, c non tutti 0.

Cart into param

→ pt base :

$$\begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ d/b \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d/c \end{pmatrix} \circ \dots$$

o slope: $\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

→ base (2 vettori) della p-scittone: $ax + by + cz = 0$

$$\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$$

sono 3 vettori ma

$$\text{rank} \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ -a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ ramo bene.

Param $\leadsto$ cart

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$+ \text{Span} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right)$$

Sette

$\rightarrow$ 1 equaz. omogenea per fissatura

$\rightarrow$ poi impongo param app. per fto base
appintando i termini noti.

Cercare equaz. soddisfatte da $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$:

Oss: $\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \alpha_1 - \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \beta_1 + \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \gamma_1 &= 0 \\ // \quad \cdot \alpha_2 \quad // \quad \cdot \beta_2 + \quad // \quad \cdot \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) \cdot x - (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) \cdot y + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \cdot z = 0$$

noto che almeno uno dei tre coeff. $\neq 0$
 grazie all'ipotesi che i 2 vettori fossero lin. indep.

ES: Two eq. cent. d: $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

eq. plane:

$$((-4) \cdot (-3) - 1 \cdot 5)x - (7 \cdot (-3) - 1 \cdot 2) \cdot y + (7 \cdot 5 - (-4) \cdot 2) \cdot z = 0$$

$$7x + 23y + 43z = 0$$

verifico: $49 - 92 + 43 = 0 \quad \checkmark$

$$14 + 115 - 129 = 0 \quad \checkmark$$

$$7 \cdot 3 + 23 \cdot (-1) + 43 \cdot 2 = 21 - 23 + 86 = 84$$

$$7x + 23y + 43z = 84$$

5.5.8 Find a basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^3$ such that

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2a_{11} + 5a_{21} & -2a_{12} + 5a_{22} & -2a_{13} + 5a_{23} \\ 3a_{11} - 7a_{21} & 3a_{12} - 7a_{22} & 3a_{13} - 7a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\forall A \in M_{2 \times 3}$$

Def $\downarrow [\cdot]$

$$f_A \cdot \mathcal{E}_3 = \mathcal{E} \cdot [f_A]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{C}}$$

uguaglianza
tra matrici

cioè $A \cdot I_3 = \mathcal{E} \cdot [f_A]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{C}}$

ancora $A = \mathcal{E} \cdot [f_A]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{C}}$

Il testo chiede che

$$[f_A]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2a_{11} + 5a_{21} & -2a_{12} + 5a_{22} & -2a_{13} + 5a_{23} \\ 3a_{11} - 7a_{21} & 3a_{12} - 7a_{22} & 3a_{13} - 7a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Dopo vediamo:

$$A = C \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot A \quad \checkmark A$$

$$\Leftrightarrow C \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

also $C = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

6.1.41

Risolvere

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 6 \\ 2x - 5y + z = 11 \\ 4x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$z = -2x + 5y + 11$$

$$\begin{cases} 3x - 4y - 4x + 10y + 22 = 6 \\ 4x - 3y - 6x + 15y + 33 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 6y = -16 \\ -2x + 12y = -31 \end{cases}$$

nessuna soluzione

6.1.6

$$\begin{cases} 5x - 4y - 3z = -1 \\ -x + 6y + 4z = 1 \\ 7x + 10y + 6z = 1 \end{cases}$$

$$x = 6y + 4z - 1$$

$$\begin{cases} 30y + 20z - 5 - 4y - 3z = -1 \\ 42y + 28z - 7 + 10y + 6z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26y + 17z = 4 \\ 52y + 34z = 8 \end{cases}$$

Soluz. part: $y = -\frac{1}{2}$, $z = 1$, $x = -3 + 4 - 1 = 0$

Generatore della retta delle soluz. dello omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 6 \cdot 17 + 4 \cdot (-26) \\ 17 \\ -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 - 104 \\ 17 \\ -26 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Solutions: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 26 \end{pmatrix} \right)$

OPPURE:

$$\det \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} = \dots = 0$$

III equaz. corrisp. a comb. lin. I + II:

$$\begin{cases} -4\alpha + 6\beta = 10 \\ -3\alpha + 4\beta = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 5 \\ -3\alpha + 4\beta = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

E' vero che esiste sol. IV e' 2. (f.h. I) + 3. (f.h. II)
 $2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 1 \neq 5$

→ posso scartare IV.

$$\begin{cases} 5x - 4y - 3z = -1 \\ -x + 6y + 4z = 1 \end{cases}$$

solut. part. - - -

generatore particolare: $\begin{pmatrix} -4 \cdot 4 - 6 \cdot (-3) \\ -(5 \cdot 6 - (-1) \cdot (-3)) \\ 5 \cdot 6 - (-1) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 26 \end{pmatrix}$

6.1.7

Due piante soluz. ha per $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - 2z = 1 \\ (1+t)x + 3y + z = t \\ 7x + 12y + 2tz = -1 \end{cases}$$

Sistema 3×3 con matrice incompleta

so che se ma ha $\det \neq 0$

ha soluzione unica.

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -2 \\ 1+t & 3 & 1 \\ 7 & 12 & 2t \end{pmatrix};$$

A

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 3+t & 8 & 0 \\ 1+t & 3 & 1 \\ -2t^2-2t+7 & 12-6t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 3+t & 8 \\ -2t^2-2t+7 & 12-6t \end{pmatrix}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 3+t & 4 \\ -2t^2-2t+7 & 6-3t \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} -3t^2 - 3t + 18 \\ + 8t^2 + 8t - 28 \end{pmatrix}$$

$$= -2 (5t^2 + 5t - 10) = -10(t^2 + t - 2)$$

$$= -10(t+2)(t-1).$$

Se $t \neq 1, -2$ ho soluz. unica.

$$t=1 \quad \begin{cases} 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 7x + 12y + 2z = -1 \end{cases}$$

Se de le parti europ. sono lin. dip:

$$I = -\frac{2}{3} (7 \cdot I - 2 \cdot II)$$

vale per termini noti?

$$-\frac{2}{3} (7 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) \neq 1 \quad \underline{\underline{\text{No}}}$$

impossibile per $t=1$.

$t = -2$: $II = 3 \cdot I + 2 \cdot II$ anche termini noti
 $\Rightarrow$ infinite soluzioni