

Algebra Lineare 27/12/18

Regole di Cramer: se $A \in M_{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$
l'unica soluzione di $A \cdot x = b$ è data da

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

dove A_i è ottenuta da A sostituendo
la i -esima colonna con b .

Dimo: la soluz. è $x = A^{-1} \cdot b$, cioè

$$x_i = (A^{-1} \cdot b)_i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_{ij} \cdot b_j$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)} \cdot b_j$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} b_j \det(A^{ji})}{\det(A)}$$



Sviluppo lungo colonna
i-esime di A_i . $\square$

$$\text{Es: } \begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det = 6 + 35 = 41 \neq 0$$

Soluz. unica:

$$x = \frac{1}{41} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{41}$$

$$y = \frac{1}{41} \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{23}{41}$$

Ex 6.1.2

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 42 \\ x + 5y - 6z = -27 \\ 2x + 4y - z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= -20 + 36 \\ &\quad -20 + 8 \\ &\quad -3 + 96 \\ &= -43 + 140 = 97 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{97} \det \begin{pmatrix} 42 & -3 & 2 \\ -27 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{97} \begin{pmatrix} -210 + 36 \\ -216 + 81 \\ -20 + 1008 \end{pmatrix} = \frac{679}{97} = 7$$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 42 \\ x + 5y - 6z = -22 \\ 8x + 4y - z = 2 \end{cases}$$

$$z = 2x + 4y - 2$$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 4x + 8y - 4 = 42 \\ x + 5y - 12x - 24y + 12 = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 5y = 46 \\ 11x + 19y = 32 \end{cases}$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 46 & 5 \\ 32 & 19 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}} = \frac{679}{97} = 7$$

$$y = -2 \quad z = 4$$

$\circ$

V sp. vett.; stsp. affine $\bar{E}$

$$E = x_0 + W = \{x_0 + w : w \in W\}$$

dove $x_0 \in V$ (pto base), $W \subset V$ stsp (giacitura).

Visto: si può scegliere qualsiasi $x_0 \in E$;
 W è unico -

Chiuso $\dim(E) = \dim(W)$.

Visto: se x_0 è soluz. di $A \cdot x = b$ allora
l'insieme di tutte le soluz. è $(A \in M_{m \times n})$
 $x_0 + \text{Ker}(A)$

$\Rightarrow$ esso è sottosp. affine di $\mathbb{R}^n$ con
giacitura $\text{Ker}(A)$; ha $\dim = n - \text{rank}(A)$.

Def: se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un sottosp. affine di
dimensione k , chiamo **presentazione canonica**
di E una espressione $E = \{x: Ax=b\}$;
oppure dico che $Ax=b$ sono **equazioni canoniche**
di E e scrivo $E: Ax=b$. Invece chiamo
presentazione parametrica di E una sua espressione
come $E = x_0 + \text{Span}(v_1, \dots, v_p)$ oppure dico

che E ha equazioni parametriche $x_0 + t, v, \dots, t_p^v$.

Prop: se $E \subset \mathbb{R}^m$ ha dimensione k è sempre possibile fornire una parametrizzazione cartesiana con $m-k$ equazioni (oppure di più) e una espressione parametrica con k parametri (oppure di più).

Es: $x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

presentaz. param.
di una retta affine

$$x: \begin{cases} x = -5t + 7 \\ y = 4t - 3 \end{cases}$$

scrittura
equiv.

$$x = \left\{ \begin{pmatrix} -5t + 7 \\ 4t - 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Cerchiamo equazioni cartesiane: vogliamo trovare
 a, b, c t.c. ogni punto di x soddisfa $ax + by = c$;
ovvero $a(-5t + 7) + b(4t - 3) = c \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ovvero

$$\begin{cases} 7a - 3b = c \\ -5a + 4b = 0 \end{cases}$$

posso scegliere $a = 4$, $b = 5$, $c = 13$.

Cioè: partendo da $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$
(omogenee)

- Trovo eq. cont. della giacitura: $4x + 5y = 0$

- cambio termine noto imponendo passaggio

per $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$: $4 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) = 13$

- equaz. $4x + 5y = 13$.

Es: $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 7x - 4y = 3 \right\}$

scrittura
equiv.

$\rightarrow \pi : 7x - 4y = 3$

presentazione canonica
della rete π

Presentazione param = risolvere -

Soluz. part. delle non omogenee: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Generatore delle soluz. delle omogenee: $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ presenz. param $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right).$

Es: $\underline{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

$$\underline{P}: \begin{cases} x = t + 2s + 2 \\ y = 3t + 7s - 1 \\ z = -2t + 4s + 5 \end{cases}$$

presenz. param
del piano P
(dim = 2)

Ottengo presenz. cartesiana (1 equazione) eliminando i parametri:

$$\begin{cases} t = x - 2s - 2 \\ y = 3x - 6s - 6 + 7s - 1 \\ z = -2t + 4s + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = y - 3x + 7 \\ t = x - 2y + 6x - 14 - 2 = 7x - 2y - 16 \\ z = \underbrace{-14x}_{-14x} + \underbrace{4y}_{+4y} + 32 + \underbrace{4y}_{+4y} - \underbrace{12x}_{-12x} + 28 + 5 \end{cases}$$

$$26x - 8y + z = 65$$

Verifichiamo:

- pto base soddisfa eq. non omogenea:

$$26 \cdot 2 - 8 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 52 + 8 + 5 = 65 \checkmark$$

- i due vettori che generano la facciata soddisfanno l'omogenea:

$$26 \cdot 1 - 8 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 26 - 24 - 2 = 0 \checkmark$$

$$26 \cdot 2 - 8 \cdot 7 + 1 \cdot 4 = 52 - 56 + 4 = 0 \checkmark$$

$$\underline{\text{Es:}} \quad r: \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 7x + 2y - 6z = 3 \end{cases}$$

presentazione
cartesiana
della retta r

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 3 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \quad \underbrace{\hspace{2em}}_b$

$$\text{rank}(A) = 2$$

(he esiste una
sottomatrice 2×2 con $\det \neq 0$)

$$\Rightarrow \text{rank}(A|b) = 2 \Rightarrow \text{esistono soluz.}$$

R-C

$\Rightarrow$ constituiscono step off. d. $\dim = 3 - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$

Condizioni necessarie. param = risoluzione -

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 7x + 2y - 6z = 3 \end{array} \right. \quad \text{II} - 3 \cdot \text{I} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x + 17y - 15z = 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -17y + 15z + 3 \\ -34y + 30z + 6 - 5y + 3z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -39y + 33z = -6 \\ x = -17y + 15z + 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 13y - 11z = 2 \\ x = -17y + 15z + 3 \end{cases}$$

solut. part non zero $y = z = 1 \Rightarrow x = 1$

solut. zero, generate de: $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

$$-17 \cdot 11 + 15 \cdot 13 = -187 + 195$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Prop: $E \subset \mathbb{R}^n$ s.t. s.t. aff. di dim k

$\Rightarrow$ ha presen. cart. con $\geq n-k$ equazioni
< parametrica con $\geq k$ parametri

Dim: (param) $E = x_0 + W$ $\dim(W) = k$

$$W = \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$$

$\Rightarrow E = x_0 + \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$ presen. con k parametri

- aggiungendo altri vettori di W ottergo presen. con più parametri

• non posso farlo con $< k$ (per generare W servono $\geq k$ vettori)

(cont): dato $E = x_0 + W$ $\dim(W) = k$

$$W = \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$$

Cerco $A \in M_{(m-k) \times m}$ t.c. $W = \text{Ker}(A)$;

fatto questo basta porre $b = A \cdot x_0$ e si ottiene

$$E: A \cdot x = b$$

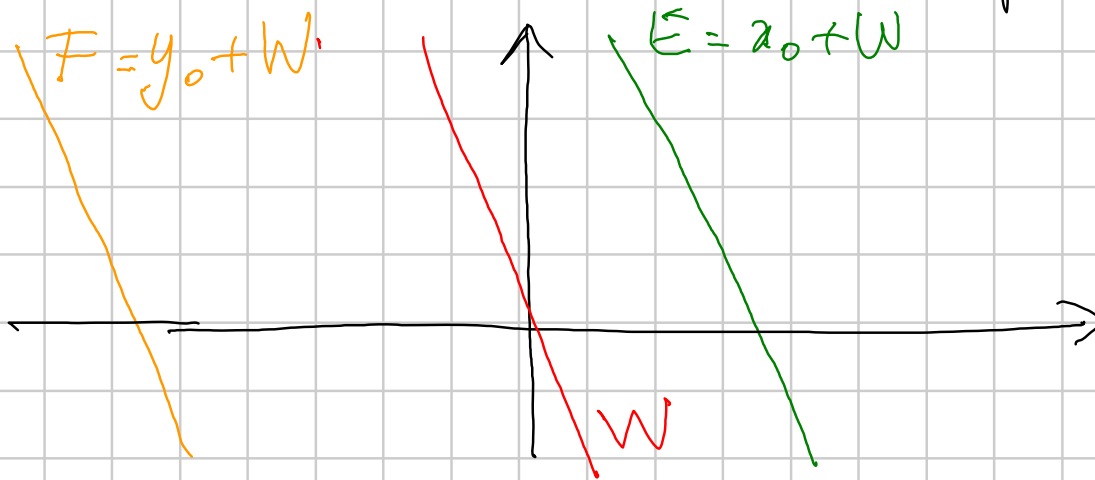
Completiamo $w_1, \dots, w_k$ a base $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_m$ di $\mathbb{R}^m$
e definiamo $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ come l'unica appl. lin. t.c.

$$\begin{cases} f(w_i) = 0 & i = 1, \dots, k \\ f(v_{k+i}) = e_i & i = 1, \dots, m-k. \end{cases}$$

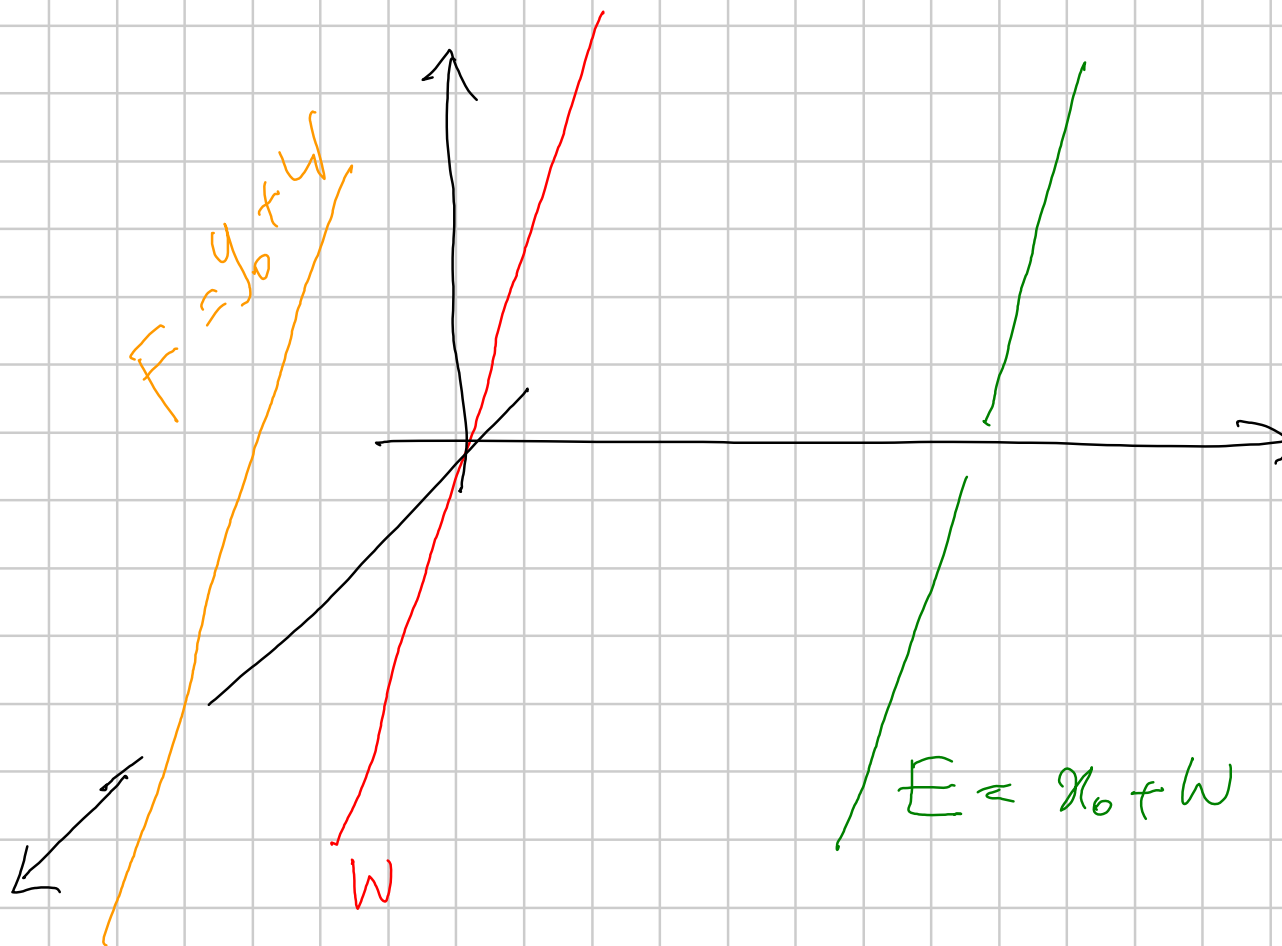
Chiaro che $W \subset \text{Ker}(f)$
 $\text{rank}(f) = m-k \implies W = \text{Ker}(f).$

Ona possiamo $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sum^{(n-k)} \\ \sum^{(m)} \end{matrix}$ □

Parallelismo tra rette nel piano e nello spazio.



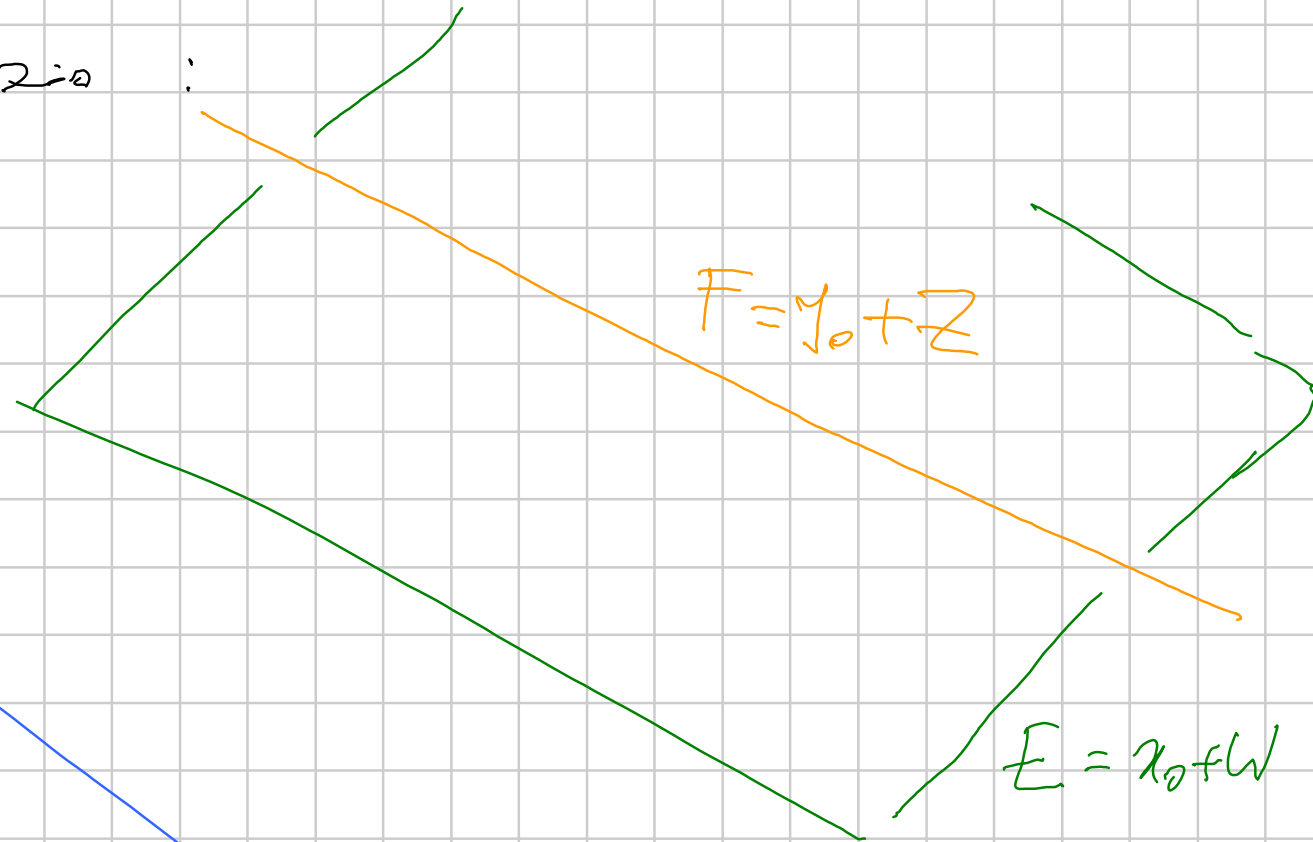
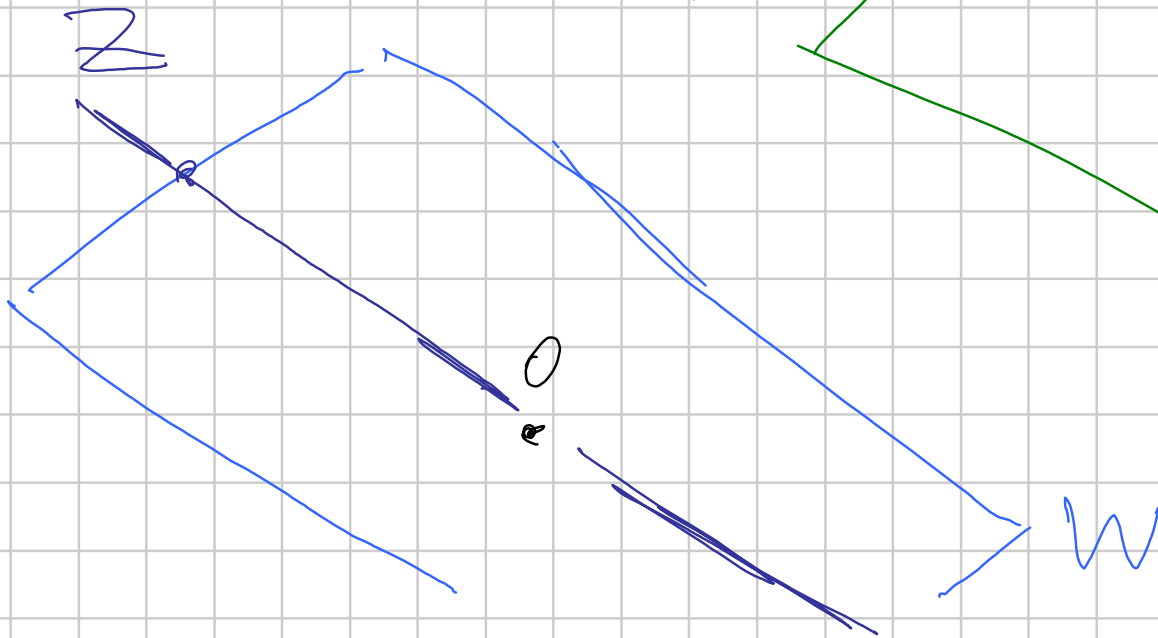
parallele =
= stesse pendenza



Piani nello spazio



Rette e piano nello spazio :



$$E = x_0 + W$$

F parallela a E significa $Z \subset W$.

Def: Diciamo due sottosp. affini $E = x_0 + W, F = y_0 + Z$ sono paralleli, scriviamo $E \parallel F$, se $W \subset Z$ o $Z \subset W$.



Ricordo: se $W, Z \subset V$ sono sottosp. vett. allora $W \cap Z$ è un sottosp. vett.

Provare se $E = x_0 + W$, $F = y_0 + Z$ ha :

non risp. aff.

$E \cap F$



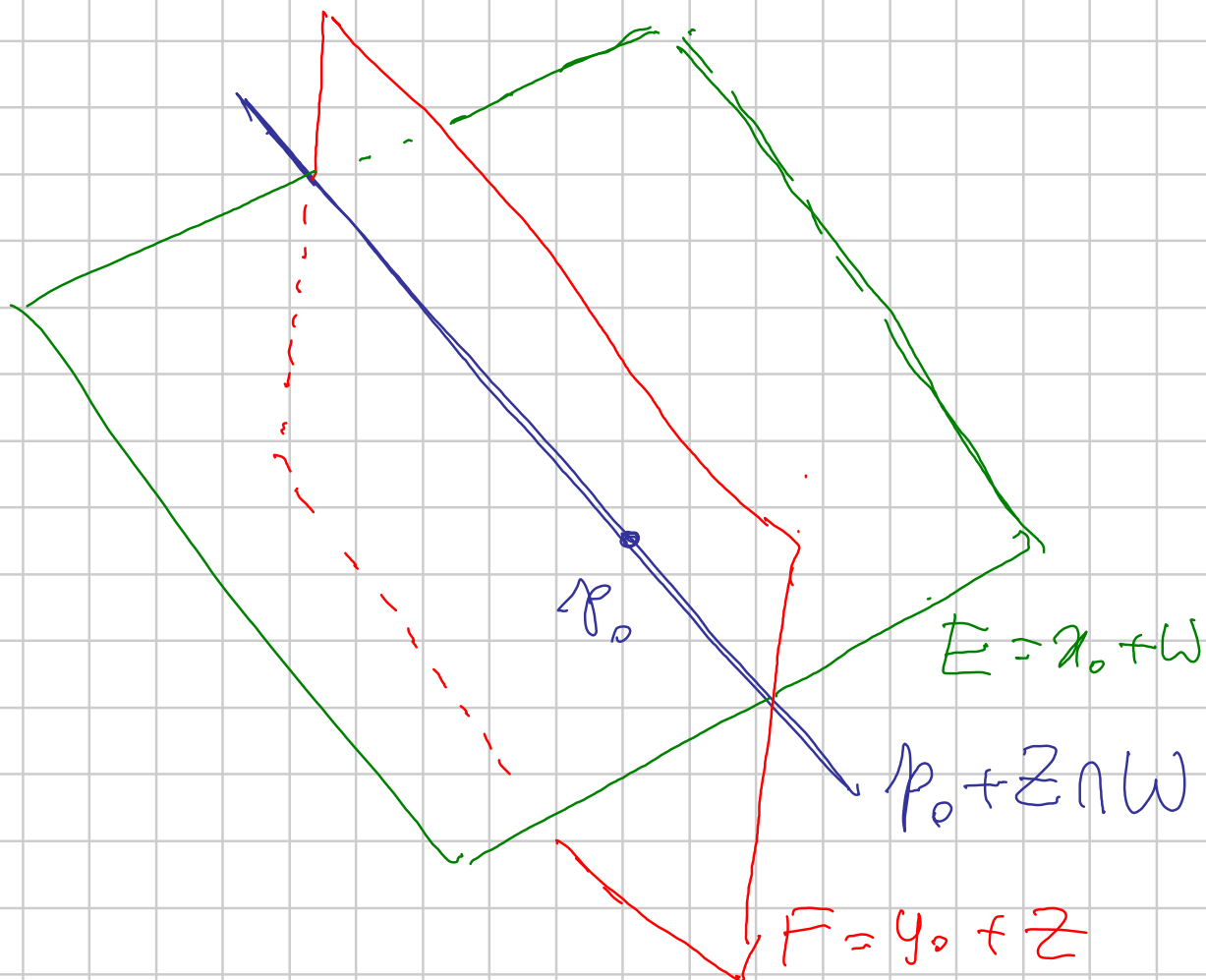
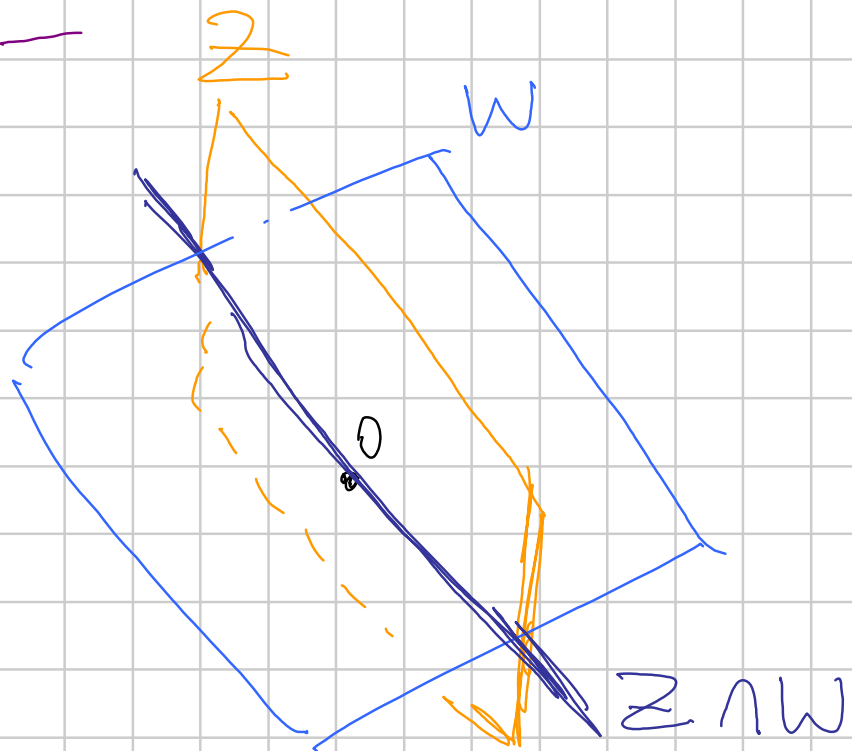
contiene p_0 : $E \cap F = p_0 + W \cap Z$
risp. aff.

Es: due rette o piani o rette/piano paralleli:
come sopra sono disgiunti.

Es: in $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette sghembe
(disgiunte ma non parallele):



E :



Oss: Se E, F sono stsp. affini EUF lo è solo se
solo se ECF oppure FCE .

Def: chiamo $E+F$ il più piccolo stsp. aff.
che contiene EUF .

Analogo aff. in delle formule di Gramsci.

- $E \cap F \neq \emptyset$; $E \cap F \ni p_0$

traslando tutto di $-p_0$ trova la
situazione dei step. veli

$$\Rightarrow \dim(E) + \dim(F) = \dim(E \cap F) + \dim(E + F).$$

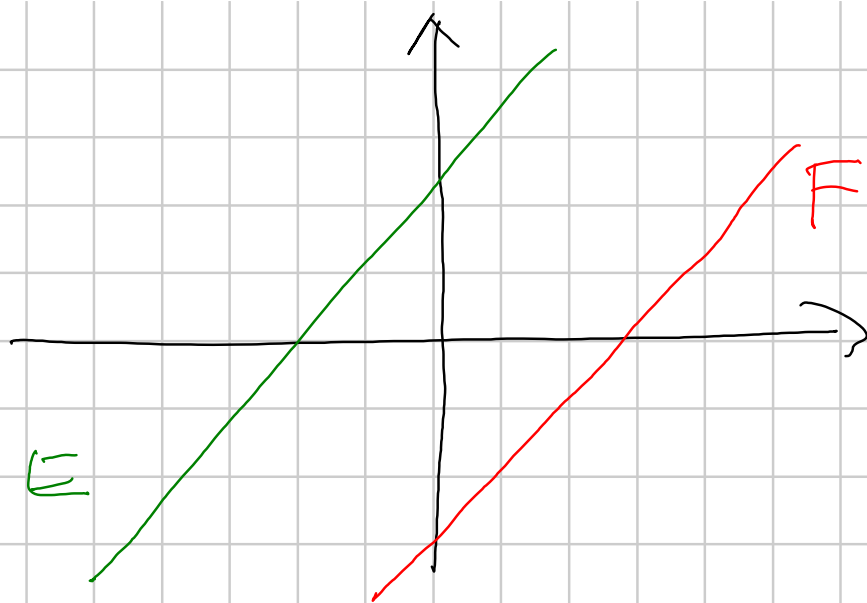
(infatti $E + F = p_0 + (W + Z)$.)

- $E \cap F = \emptyset$

$$E = x_0 + W$$

$$F = y_0 + Z$$

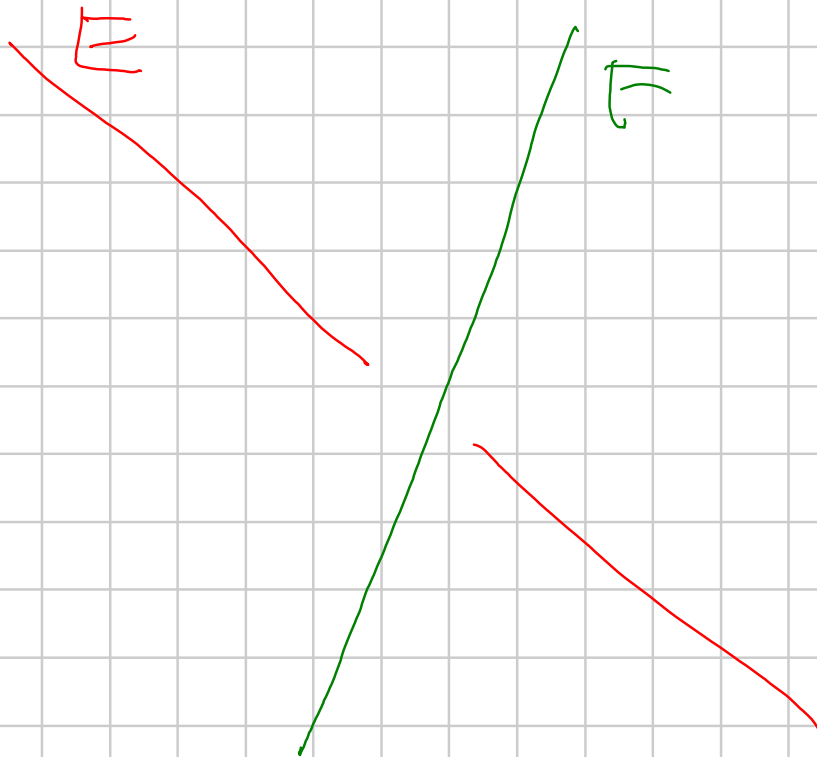
$E \rightarrow$:



$$\dim(W+Z) = 1$$

$$\dim(E+F) = 2$$

Es: rote sphäre in $\mathbb{R}^3$



$$\dim(W+Z) = 2$$

$$\dim(E+F) = 3$$