

Algebra lineare 26/9/18

- queste lezioni (levarne PDF + video MP4)
sul mio sito
- libro - edizione 2018
 - Esercizi svolti (svolti su www)
 - Esercizi non svolti
li svolgiamo in aula



PROVATECI PRIMA

— o —

Codocente : L. Slavich

— micovienti

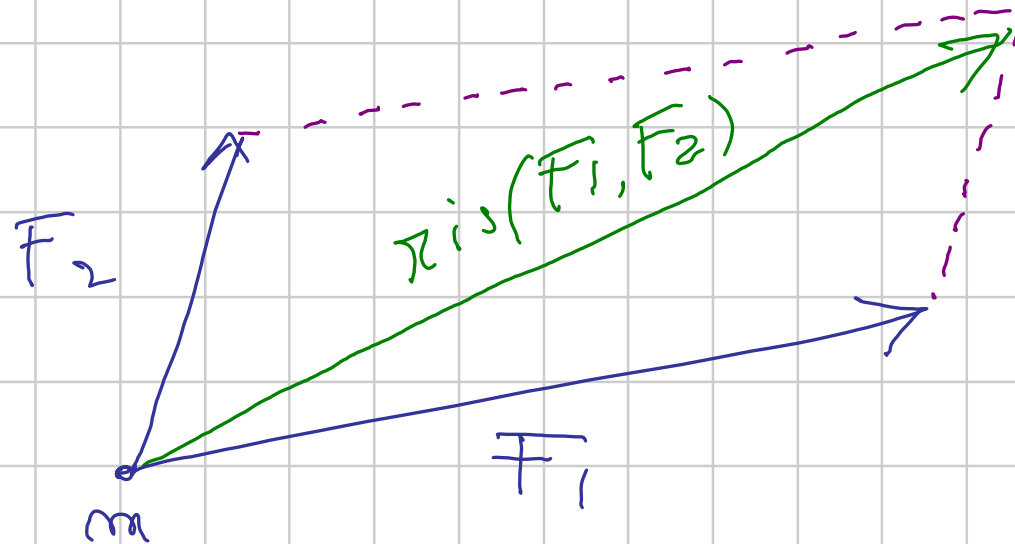
— CHIEDETE

MOTIVAZIONI (anticipo)

Forze applicate:



$$(F = ma)$$



Proprietà:

- $\text{ris}(F_1, F_2) = \text{ris}(F_2, F_1)$

- $\text{ris}(F_1, \text{ris}(F_2, F_3)) = \text{ris}(\text{ris}(F_1, F_2), F_3)$

- se O è la forza nulla (intensità nulla)

$$x + y = y + x$$

COMMUTATIVA

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

ASSOCIATIVA

$$\text{ris}(F, 0) = F$$

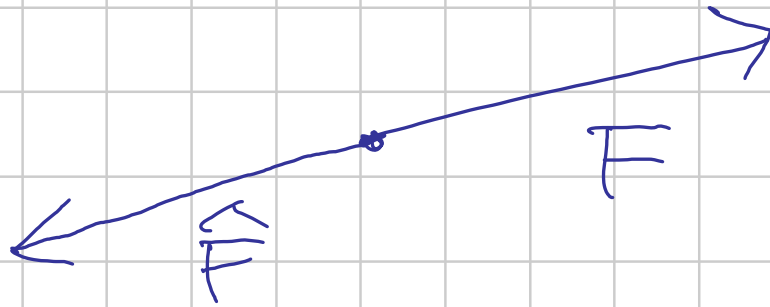
- se $\hat{F}$ è la forza con intensità e direz. opposte a F , verso opposto

$$\text{ris}(F, \hat{F}) = 0$$

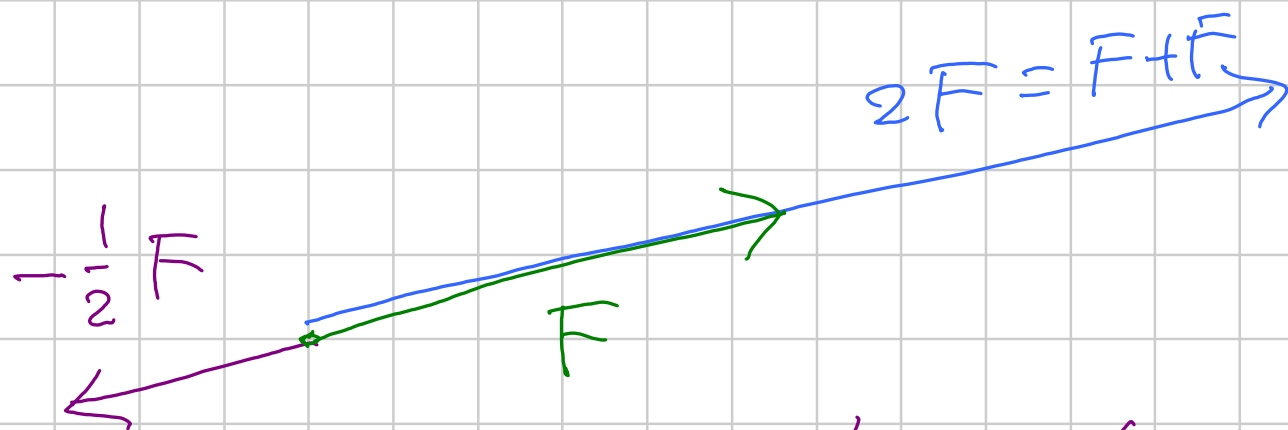


$$x + 0 = x$$

$$x + (-x) = 0$$



Allora: invece che $\text{ris}(F_1, F_2)$ scrivo $F_1 + F_2$
 invece che $\hat{F}$ scrivo $-F$.



$$\lambda \cdot F = \begin{cases} \text{stessa direz. di } F \\ \text{intensità } |\lambda| \text{ volte} \\ \text{quella di } F \\ \text{verso: stesso di } F \text{ se } \lambda \geq 0 \\ \text{opposto se } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

λ numero
 F forza

Proprietà:

$$\bullet (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot F = \lambda_1 \cdot F + \lambda_2 \cdot F$$

$$\bullet \lambda \cdot (F_1 + F_2) = \lambda \cdot F_1 + \lambda \cdot F_2$$

convenzione
solita: si
esprime
prima i.
e dopo i +

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

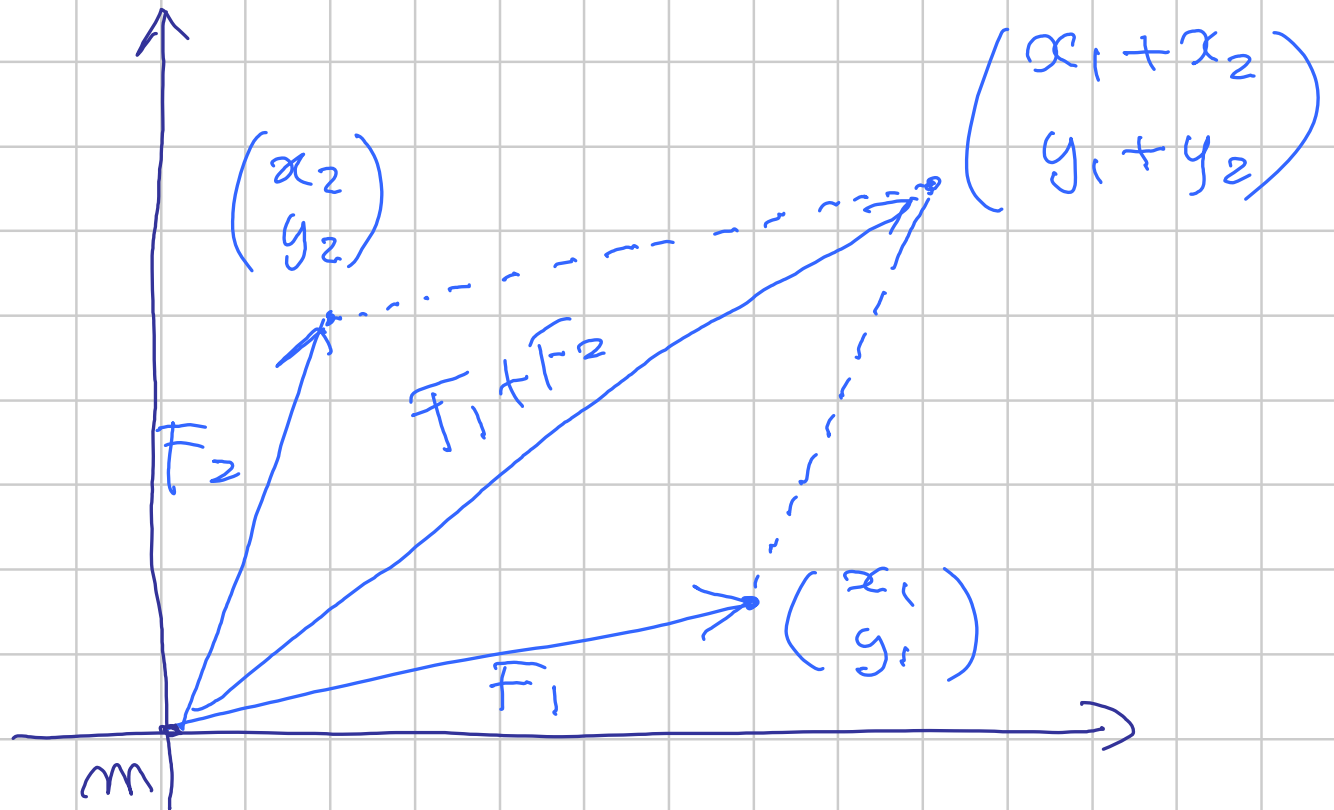
DISTRIBUTIVA

$$\bullet \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot F) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot F$$

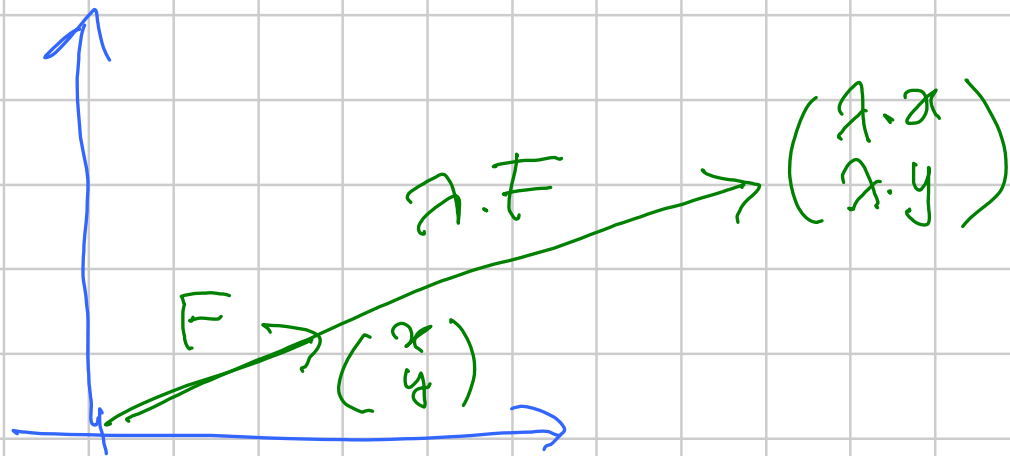
$$\bullet 1 \cdot F = F$$

Queste 8 proprietà saranno il paradigma
degli oggetti "spazi vettoriali".

In coordinate



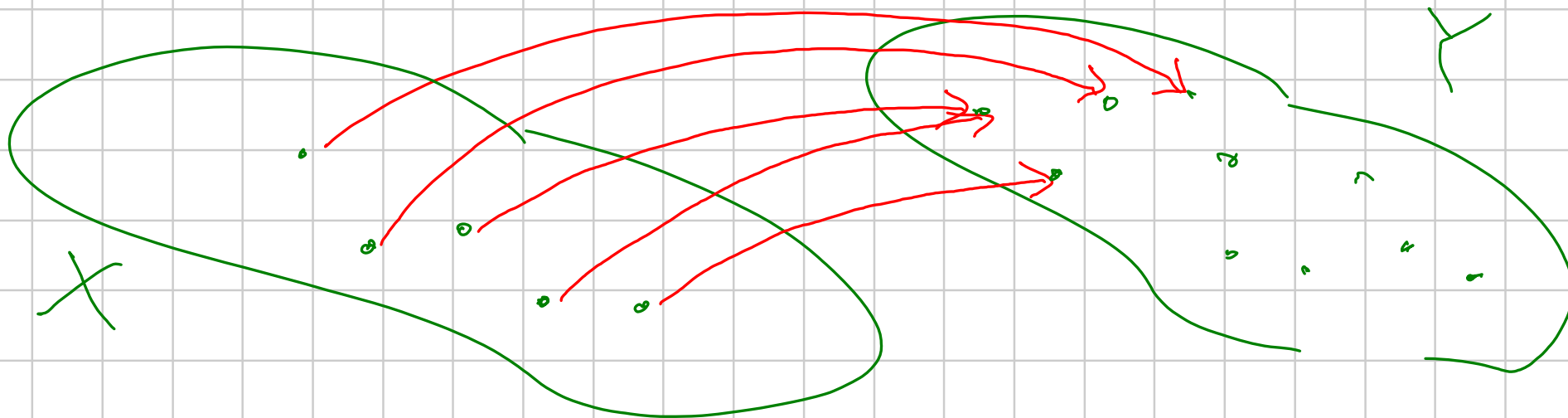
Dunque siano: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$



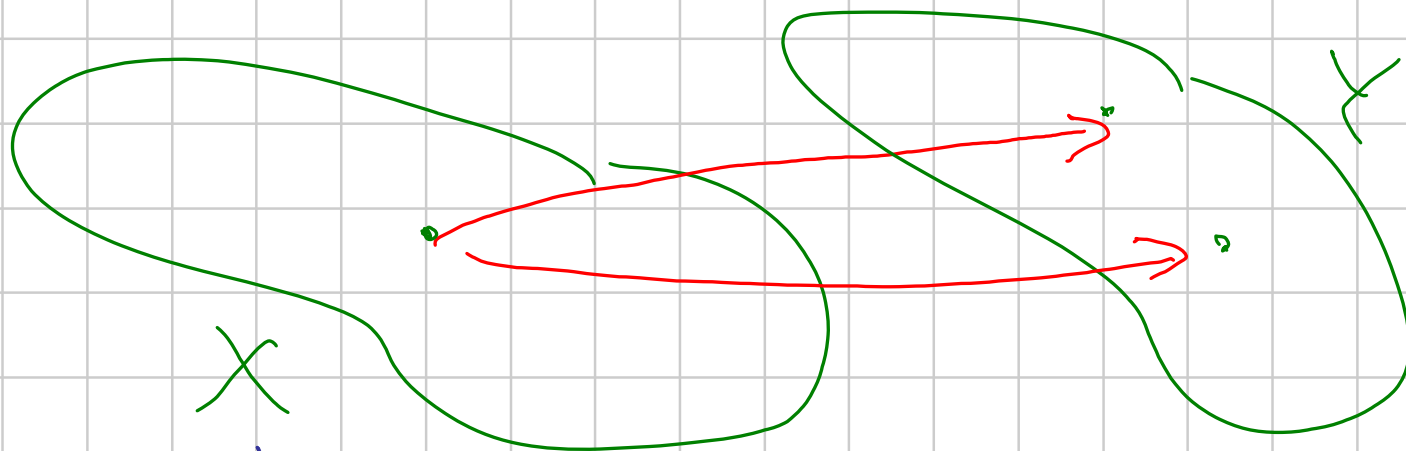
Scrivo: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

Funzioni: X, Y insiemi; una funzione
 $f: X \rightarrow Y$ è una legge che associa a ogni

pto x di X un pto $f(x)$ di Y .



VIETATO:

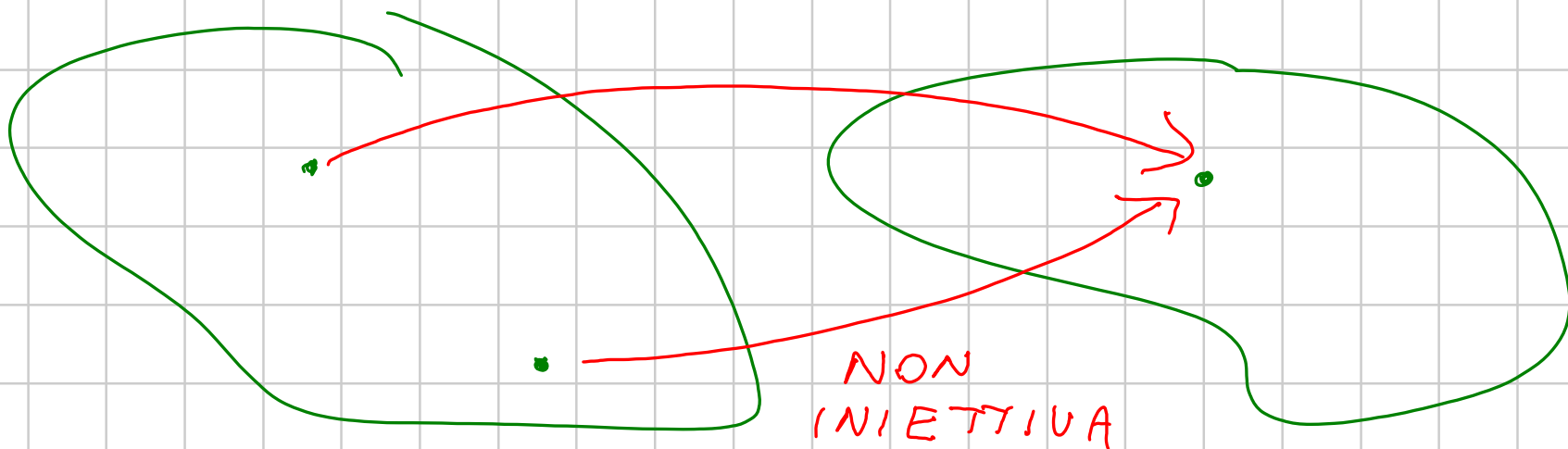


Scrivo

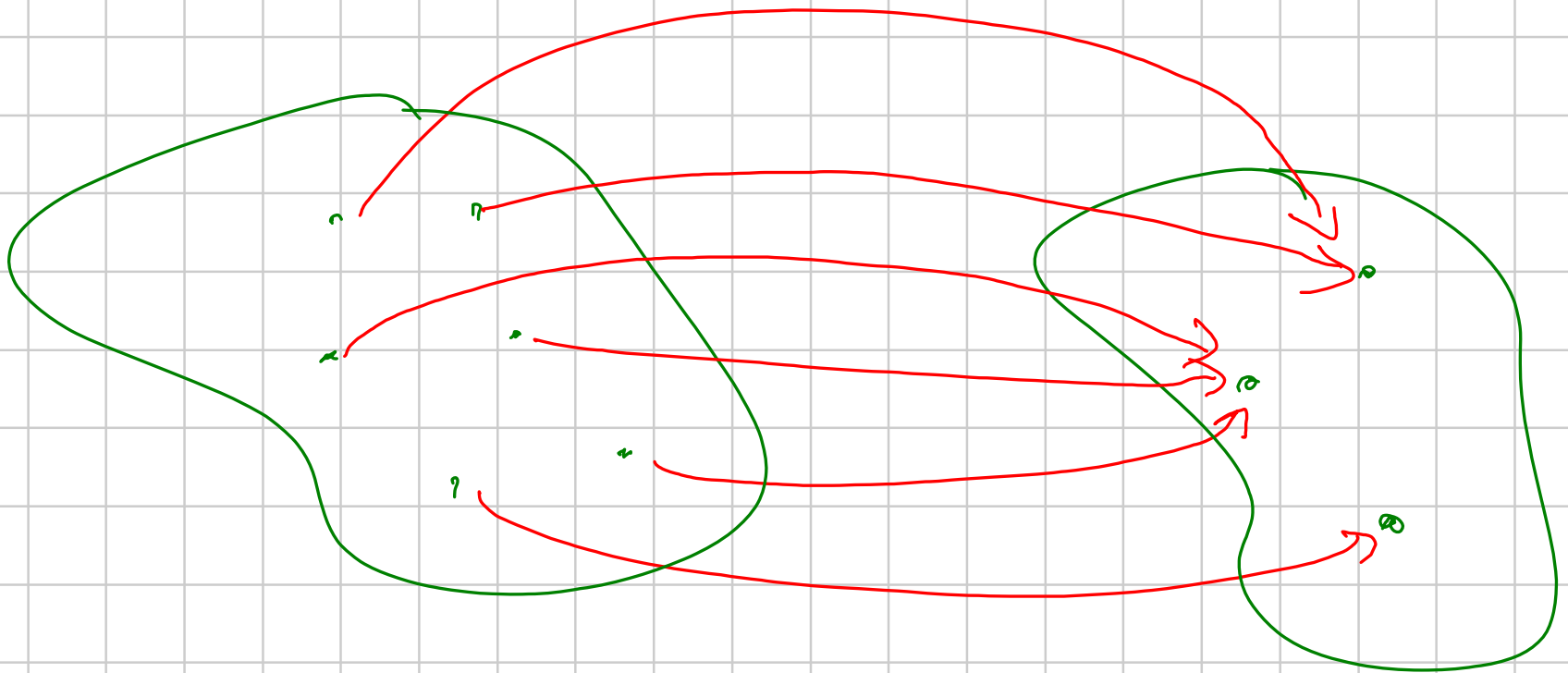
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Def: f è iniettiva se (formulaz. equiv):

- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
pt. diversi vanno in punti diversi
- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $\forall y \in Y \exists$ al più un x t.c. $f(x) = y$



Def: f surjective se $\forall y \in Y \exists$ almeno un $x \in X$
t.c. $f(x) = y$

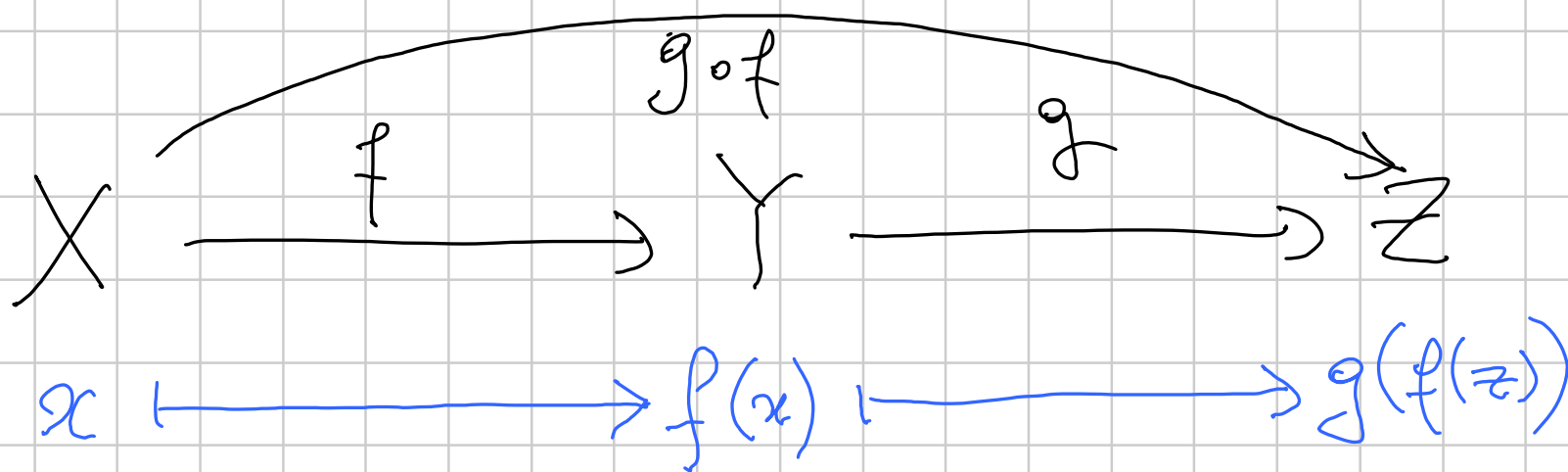


SURGETTIVA

Def: se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$

sono funzioni chiamate composizioni le funzioni

$g \circ f: X \rightarrow Z$ dato da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



ATTENZIONE: Una funzione $f: X \rightarrow Y$
è determinata da:

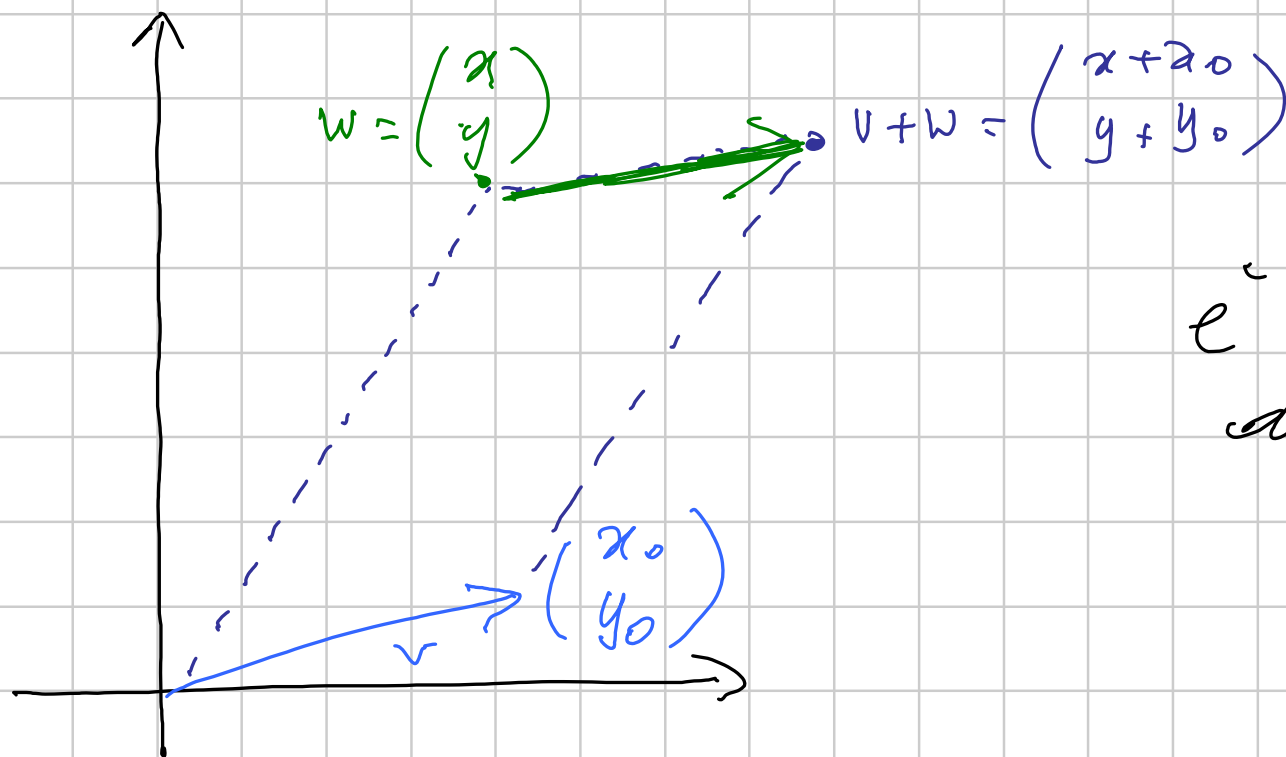
$\begin{cases} X & \text{dominio} \\ Y & \text{codominio} \\ \text{legge che associa a ogni pto di } X \text{ uno di } Y \end{cases}$

————— 0 —————

Ricordo: ho introdotto + tra pti del piano
e • tra numero e pto del piano.

Oss: se fisso $v = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ la funzione

$$\begin{array}{ccc}
 T_v: & \text{piano} & \longrightarrow & \text{piano} \\
 & w & \longrightarrow & w+v \\
 & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

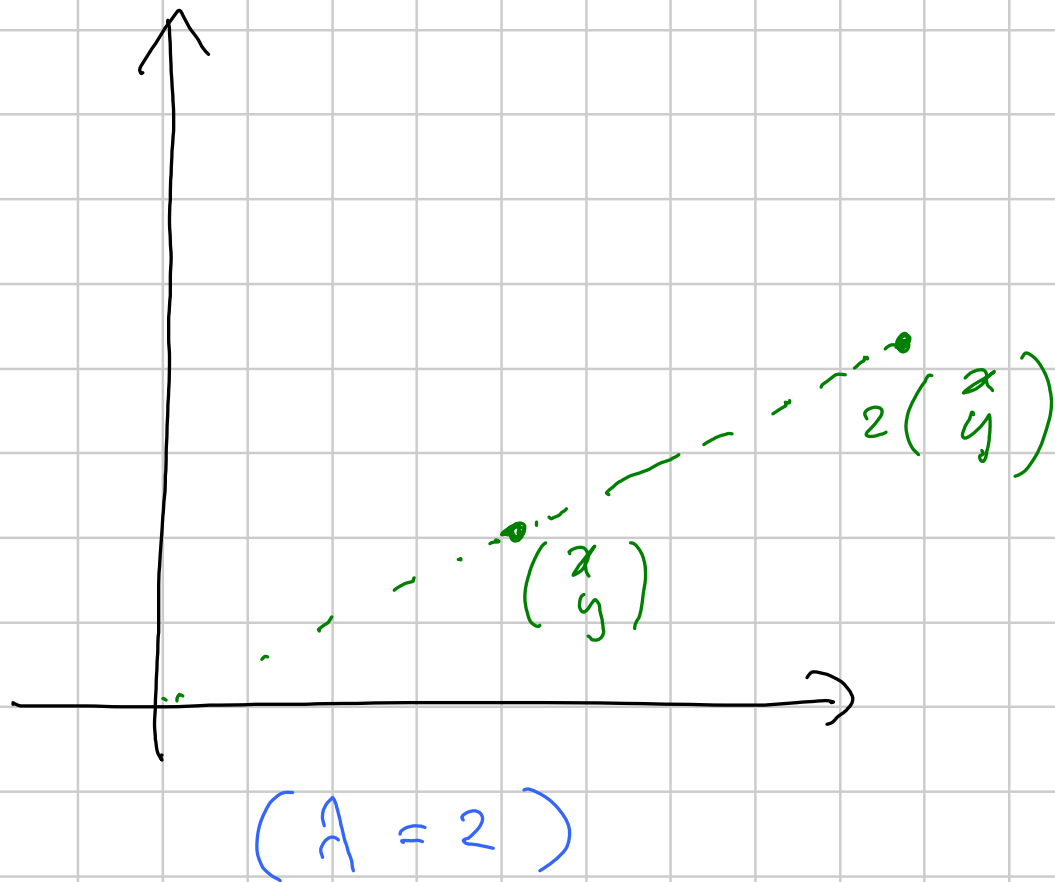


è la traslazione
di vettore v

Oss: se λ è numero la funzione

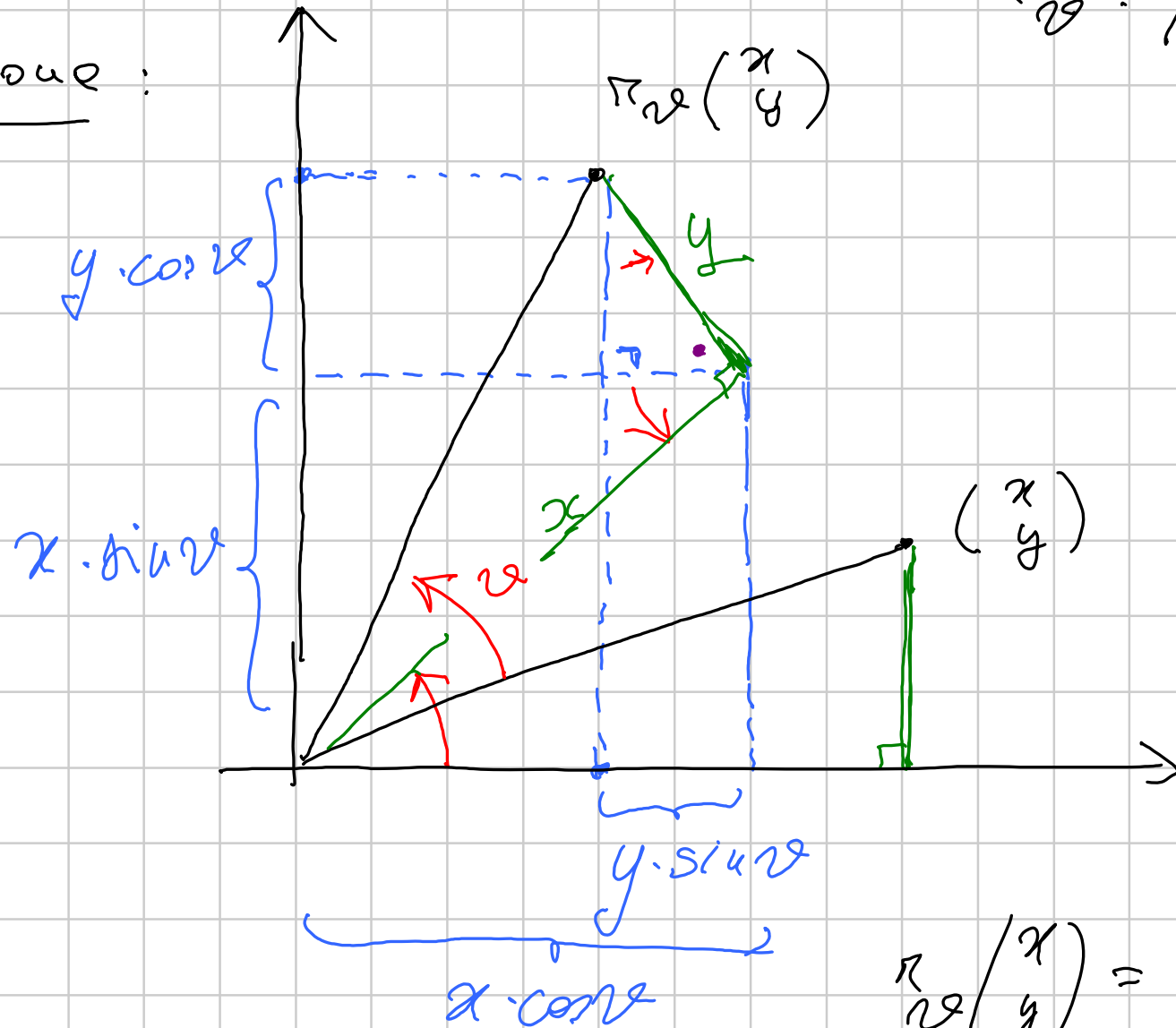
$$\begin{array}{ccc}
 \text{piano} & \longrightarrow & \text{piano} \\
 w & \longrightarrow & \lambda \cdot w \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{pmatrix}
 \end{array}$$

è l'omotopia di
ragione λ .



Rotazione:

$\tau_\vartheta: \text{piano} \rightarrow \text{piano}$



$$\tau_\vartheta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos \vartheta - y \cdot \sin \vartheta \\ x \cdot \sin \vartheta + y \cdot \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

lo scrivo come:

non posso
scrivere con +,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{matrice } 2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Operazione di prodotto tra vettore e vettore:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

↑
nuova def. di .

Poi: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Se ho due rotazioni π_α, π_φ posso capire:

$$\pi_\alpha \circ \pi_\varphi = \pi_{\alpha + \varphi}$$

$$\pi_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \pi_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\pi_\alpha \circ \pi_\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \pi_\alpha \left(\pi_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \pi_\alpha \left(R_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

ATTENZIONE:

$$R_\alpha \circ R_\varphi = R_\varphi \circ R_\alpha$$

ma in generale

$$g \circ f \neq f \circ g$$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x + 1$$

$$(g \circ f)(1) = 2$$

$$(f \circ g)(1) = 4$$

$$= R_v \cdot (R_q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

$$\Rightarrow (R_v \cdot R_q) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Devo inventarlo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix} \right) \vdots \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} ax + b\gamma & a\beta + b\delta \\ cx + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 R_\vartheta \cdot R_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta + \varphi) & -\sin(\vartheta + \varphi) \\ \sin(\vartheta + \varphi) & \cos(\vartheta + \varphi) \end{pmatrix} \\
 &= R_{\vartheta + \varphi}
 \end{aligned}$$

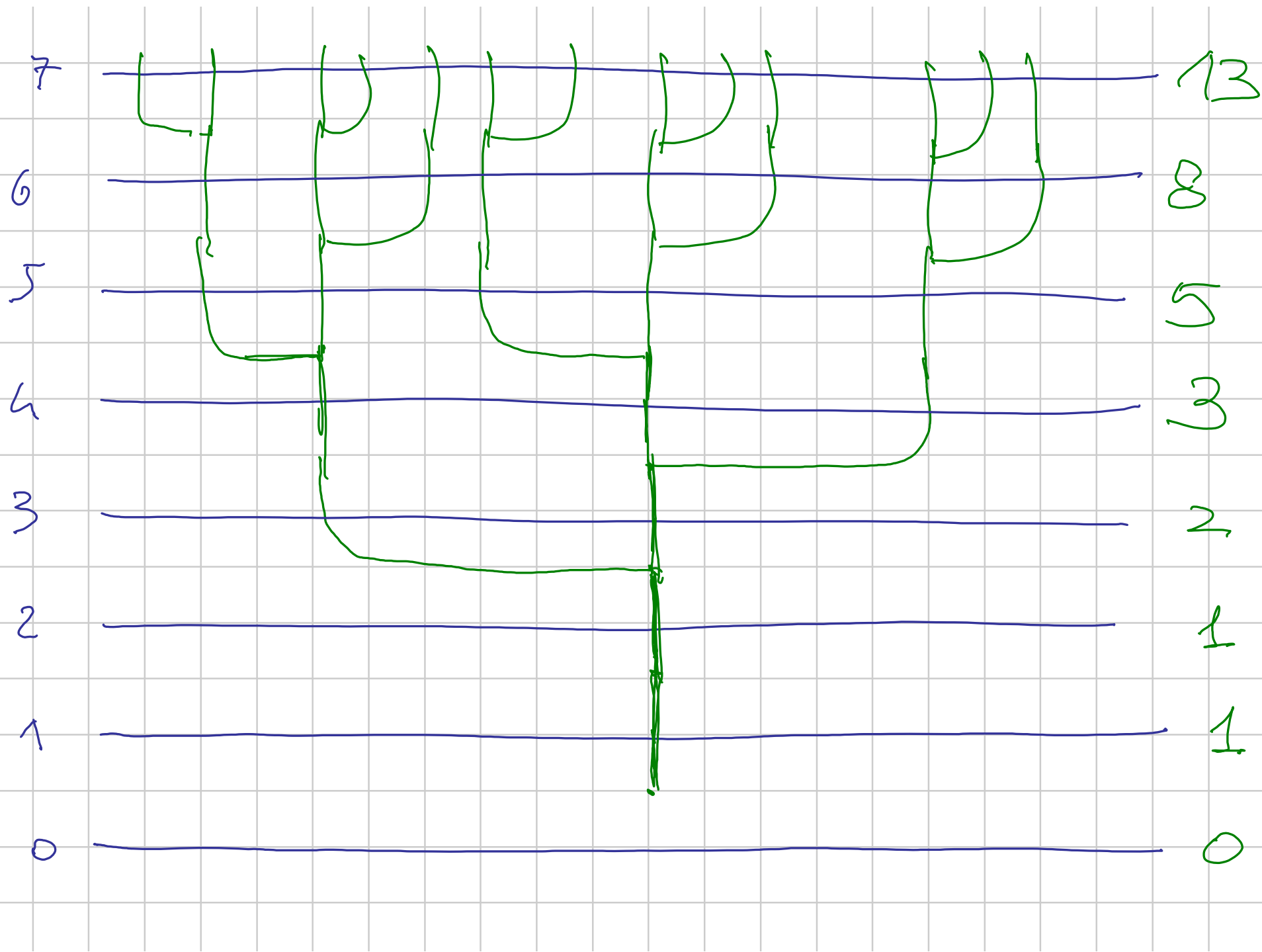
Dunque: l'operazione algebrica di prodotto
 tra matrici (inventata) contiene l'operazione

geometrica di composizione tra funzioni -



Numeri di Fibonacci -

Pianto un seme al mese 0 e l'albero cresce
con questa regola: ad ogni mese
un ramo che non ne aveva
dunque un nuovo ramo -



f_m = numero di rari al mese m

Soddisfare:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{cases}$$

$$f_{m+2} = f_{m+1} + f_m$$

↑
i sopravvissuti
del mese
precedente

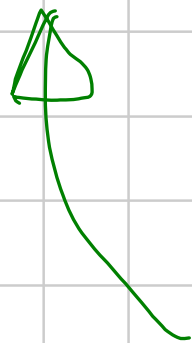
↑ gruppo di
non-vecchi al
mese $m+1$
= quelli del mese m

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34

...

Fallb :

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\underbrace{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m}_{1.62 \dots} - \underbrace{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m}_{-0.62 \dots} \right)$$



facile esercizio fatto con
teorie degli spazi vettoriali

$$f_m \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m$$

errore
piccolo per $m \gg 0$

Insiemi numerici e operazioni

Numeri naturali (interi positivi)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Operazione binaria:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Prodotto
Considera:
 X, Y insiemi

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

$$(m, m) \mapsto m + m$$

Somma

Proprietà:

1. $0 + m = m + 0 = m \quad \forall m \in \mathbb{N}$
elemento neutro

3. $m + (m + q) = (m + m) + q$
 $\forall m, m, q \in \mathbb{N}$
associativa

4. $m + m = m + m \quad \forall m, m \in \mathbb{N}$

Fatto: dato $m \in \mathbb{N}$ l'eqvez. $m+x=0$
ha soluzioni in $\mathbb{N}$ solo per $m=0$
e in tal casc ha soluz. e' $x=0$.

Numeri interi (relativi): $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Il $+$ di $\mathbb{N}$ si estende a

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$(m, n) \mapsto m+n$$

con:

$$1. \quad m + 0 = m$$

$$2. \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \exists -m \quad \text{t.c.} \quad m + (-m) = 0$$

$$3. \quad m + (n + p) = (m + n) + p$$

$$4. \quad m + n = n + m$$

Other operat: $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$(m, n) \mapsto m \cdot n$$

product

properties:

$$5. \quad 1 \cdot m = m \cdot 1 = m \quad \text{el. neutro del } \cdot$$

$$7. \quad m \cdot (m \cdot q) = (m \cdot m) \cdot q \quad \text{assoc.}$$

$$8. \quad m \cdot m = m \cdot m \quad \text{commut.}$$

$$9. \quad m \cdot (m + q) = m \cdot m + m \cdot q \quad \text{distrib.}$$

Fatto: Dato $m \in \mathbb{Z}$ l'equez. $m \cdot x = 1$
 ha soluz. solo per $m = \pm 1$ e in tal
 caso la soluz. è $x = m$.

Numeri razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

non proprio:

$$\frac{9}{-6} \neq \frac{-15}{10} \text{ come si dice.}$$

Imvea: convergo che $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ se $m \cdot q = p \cdot n$.

Quel che identifica $\frac{m}{1}$ a m dunque
vedo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Fatto: le operazioni $+$, $\cdot$ di $\mathbb{Z}$ si
estendono a $\mathbb{Q}$ con queste proprietà:

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$1. x + 0 = x$$

$$2. \forall x \exists -x \text{ t.c. } x + (-x) = 0$$

$$3. x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$4. x + y = y + x$$

$$5. x \cdot 1 = x$$

$$6. \forall x \neq 0 \exists x^{-1} \text{ t.c. } x \cdot x^{-1} = 1$$

$$7. x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$8. x \cdot y = y \cdot x$$

$$9. x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

groupes
commutatifs

DISTRIB

campo

Inverso : $x = \frac{p}{q} \neq 0, p \neq 0; x^{-1} = \frac{q}{p}$

$\mathbb{N} \leadsto \mathbb{Z} \leadsto \mathbb{Q}$ motivazioni algebriche

FaAb: su $\mathbb{Q}$ ci sono moltissime equazioni non risolubili:

ad. es. $x^2 = 2$.

Ulteriore estensione: $\mathbb{Q} \leadsto \mathbb{R}$ reali.

considero una retta su cui prendo due punti distinti che chiamo 0 e 1:



Questo consente di identificare $\mathbb{Q}$
a un sottoinsieme della retta $\mathbb{R}$.

Ora: $\mathbb{R}$ = tutta la retta.

Fatto: le operazioni $+$, $\cdot$ di $\mathbb{Q}$ si
estendono a $\mathbb{R}$ con le stesse
proprietà $\Rightarrow \mathbb{R}$ è un campo.

Oss: tra i numeri reali ci sono

- la soluzione dell'eq. $x^m = c$ $c \in \mathbb{Q}$
che è $\sqrt[m]{c}$ $c > 0$ se m è pari

- soluzioni di eq. polinomiali a coeff. interi (o razionali)

$$7x^3 - 5x^2 + 4x + 11 = 0$$

Fatto: se scelgo un numero reale a caso
ho probabilità 0 che sia sol. di una

espr. polinomiali a coeff. interi -

Polinomi a coeff. reali in una indeterminata x :

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n : \right. \\ \left. n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

non proprio: $7 + \sqrt{2} \cdot x + 9 \cdot x^3$ non sarebbe un poli

$$1 + 3x + \pi \cdot x^2 \neq 1 + 3x + \pi x^2 - 0 \cdot x^3$$

Invece: convergo che posso insieme o
cancellare e picciamente monomi
con coeff. 0

Grado di un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n$

$$\deg(p(x)) = \max \{k : a_k \neq 0\}$$

se $p(x) \neq 0$, invece

$$\deg(0) = -\infty.$$

Nello def di $\mathbb{R}[x]$ la x è indeterminata,
 $x \notin \mathbb{R}$.

Tuttavia se ho $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $x_0 \in \mathbb{R}$
posso valutare $p(x)$ in $x = x_0$ ottenendo
 $p(x_0) \in \mathbb{R}$. (Sostituisco x con x_0 .)

Es: $p(x) = 3 - \frac{1}{2}x + 9x^2 - 11x^3$

$$p(2) = 3 - 1 + 36 - 88 = \dots$$

Dunque è un polinomio e associare
una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Operaz. tra polinomi: $+$, $\cdot$.

$$(1 + 3x - 9x^3) + (2 - 5x + x^2 + x^3) \\ = 3 - 2x + x^2 - 8x^3$$

$$(1 + 3x - 9x^3) \cdot (2 - 5x + x^2 + x^3) \\ = 2 - 5x + x^2 + x^3 \\ + 6x - 15x^2 + 3x^3 + 3x^4 \\ - 18x^3 + 45x^4 - 9x^5 - 9x^6$$

$$= 2 + x - 14x^2 - 14x^3 + 48x^4 - 9x^5 - 9x^6$$

Qu generale:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k) + (b_0 + b_1x + \dots + b_hx^h) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots \end{aligned}$$

???
complicato

Quvece: Saino

$$a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

dove $a_n = 0 \quad \forall n > k$

Addiere : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$$

Produkt :

$$(\sqrt{3} - 5x + 12x^2 - 7x^3) (\pi + 2x + 9x^2 - 13x^3 + \dots x^9)$$

$$= () + () \cdot x + () \cdot x^2 + () \cdot x^3 + \dots () \cdot x^7$$

↑

$$\sqrt{3} \cdot (-13) + (-5) \cdot 9 + 12 \cdot 2 + (-7) \cdot \pi$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) \\
 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right) x^n$$