Algebra Lineare 24/10/18

$v_1, \dots, v_k$ base di $W \cap Z$

$v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_h$ base di W

$v_1, \dots, v_k, z_{k+1}, \dots, z_t$ base di Z

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_h, z_{k+1}, \dots, z_t$ base di $Z+W$.

- stanno in $Z+W$ (anzi in $Z \cup W$)
- generano $Z+W$: prendo $u \in Z+W$, cioè

$u = z + w \quad , \; z \in Z, \; w \in W;$

$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} w_{k+1} + \dots + \alpha_h w_h$

$z = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k + \beta_{k+1} z_{k+1} + \dots + \beta_t w_t$

$\Rightarrow u + z = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + \alpha_{k+1} w_{k+1} + \dots + \beta_{k+1} z_{k+1} + \dots$

- lin indip. Sia

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} w_{k+1} + \dots + \beta_h w_h$

$+ \gamma_{k+1} z_{k+1} + \dots + \gamma_t z_t = 0$

$$\Longrightarrow \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} w_{k+1} + \dots + \beta w_h}_{\in W} = \underbrace{-\gamma_{k+1} z_{k+1} - \dots - \gamma_t z_t}_{\in Z}$$

$\Longrightarrow$ tale vettore è in $W \cap Z$

$\Longrightarrow$ posso scriverlo come $\delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$

$$\Longrightarrow -\gamma_{k+1} z_{k+1} - \dots - \gamma_t z_t = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$$

$$\Longrightarrow \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k + \gamma_{k+1} z_{k+1} + \dots + \gamma_t z_t = 0$$

ma $v_1 \dots z_{k+1} \dots$ lin. indip

$\Rightarrow \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_t = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} w_{k+1} + \dots + \beta_h w_h = 0$

ma $v_1 \dots w_{k+1} \dots$ lin. indip

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_h = 0$

$\blacksquare$

Applicazioni lineari

V, W sp. vett. su $\mathbb{R}$ dico che $f: V \to W$ è lineare se rispetta le strutture di sp. vett.:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \end{array}\right\} \iff f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2)$$

V $\quad$ W

Esempi: $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 4x_1 + 7x_2 \\ -9x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Provo che è lineare: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$

$$f(\lambda x + \mu y) \overset{?}{=} \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 4x_1 + 7x_2 \\ -9x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3y_1 - 5y_2 \\ 4y_1 + 7y_2 \\ -9y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3(\lambda x_1+\mu y_1) - 5(\lambda x_2+\mu y_2) \\ 4(\lambda x_1+\mu y_1) + 7(\lambda x_2+\mu y_2) \\ -9(\lambda x_1+\mu y_1) + (\lambda x_2+\mu y_2) \end{pmatrix}$$

uguali

$\Longrightarrow$ ok

Ragione: ciascuna componente di $f(x)$ è un pol. omog. di I nelle componenti di x.

Fatto: vanno bene "solo" tali funzioni (o mascherate).

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \log\left(e^{7x_1 - 5x_2}\right)$

$= 7x_1 - 5x_2$

è lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$f(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \implies \text{non lineare}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$f(0) = 0 .$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non lineare

$$V = \mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R})$$

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p)$$

$$(\lambda \cdot f)(p) = \lambda \cdot f(p)$$

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \phi(f) = \begin{pmatrix} 3f(a) - f(b) \\ 2f(a) + f(b) + 7f(c) \end{pmatrix}$$

linear? $\quad \phi(\lambda f + \mu g) \stackrel{?}{=} \lambda \phi(f) + \lambda \phi(g)$

$$\begin{pmatrix} 3(\lambda f+\mu g)(a) - (\lambda f+\mu g)(b) \\ 2(\lambda f+\mu g)(a) + (\lambda f+\mu g)(b) + 7(\lambda f+\mu g)(c) \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 3\lambda f(a) + 3\mu g(a) - \lambda f(b) - \mu g(b) \\ 2\lambda f(a) + 2\mu g(a) + \lambda f(b) + \mu g(b) + 7\lambda f(c) + 7\mu g(c) \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$ uguali fra loro

$\Longrightarrow$ è lineare

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 3f(a) - f(b) \\ 2f(a) + f(b) + 7f(c) \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3g(a) - g(b) \\ 2g(a) + g(b) + 7g(c) \end{pmatrix}$$

Ragione: le componenti di $\phi(f)$ sono pol. omog. di I grado in $f(a), f(b), f(c)$ — che svolgono il ruolo di "componenti di f"

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[t]$$

$$f\begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = (5x_1 - 2x_2 + x_3) + (4x_1 + 7x_2 - 2x_3)t + (11x_1 - 9x_2 + 4x_3)\cdot t^{100}$$

linear?

$$f(\lambda x + \mu y) \overset{?}{=} \lambda f(x) + \mu f(y)$$

$$f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$5(\lambda x_1 + \mu y_1) - 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3)$$
$$+ \big(4(\lambda x_1 + \mu y_1) + 7(\lambda x_2 + \mu y_2) - 2(\lambda x_3 + \mu y_3)\big)t$$
$$+ \big(11(\lambda x_1 + \mu y_1) - 8(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3)\big)t^{100}$$

$$\lambda\big((5x_1 - 2x_2 + x_3) + (4x_1 + 7x_2 - 2x_3)t + (11x_1 - 8x_2 + 4x_3)t^{100}\big)$$
$$+ \mu\big((5y_1 - 2y_2 + y_3) + (4y_1 + 7y_2 - 2y_3)t + (11y_1 - 8y_2 + 4y_3)t^{100}\big)$$

uguali

$\Rightarrow$ lineare

Ragione: i coeff. del polinomio immagine sono pol. omog. di I grado nelle componenti di x (dunque i coeff. giocano il ruolo delle componenti per un elemento di $\mathbb{R}[t]$).

$$f : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t]$$

$$f(p(t)) = -p'(t) + p(2) \cdot t^2 + p''(-1) \cdot t^3$$

$$t\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots\right)$$

$$= -a_1 - 2a_2 t - 3a_3 t^2 - 4a_4 t^3 - 5a_5 t^4 + \cdots$$

$$+ \left(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \cdots\right) t^2$$

$$+ \left(a_2 - 6a_3 + 12a_4 - 20a_5 + \cdots\right) t^3$$

$$= -a_1 - 2a_2 t + \left(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 5a_3 + 16a_4 + \cdots\right) t^2$$

$$+ \left(a_2 - 6a_3 + 8a_4 - 20a_5 \cdots\right) t^3 - 5a_5 t^4 - 6a_6 t^5 + \cdots$$

I coeff. del pol. immagine sono tutti pol. omog. di I grado nei coeff. del pol. argomento

$\Longrightarrow$ lineare.

Prop: se $f: V \to W$, $g: W \to Z$ lineari

allora $g \circ f$ è lineare.

Dim: $(g \circ f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = g\big(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)\big)$

$= g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) =$

$= \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2))$

$= \lambda_1 (g \circ f)(v_1) + \lambda_2 (g \circ f)(v_2)$. $\square$

Ricordo: $f : X \to Y$ funzione; immagine di f

$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(x) : x \in X \} \subset Y.$$

Sia ora $f : V \to W$ lineare. Chiamo nucleo di f l'insieme

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \}$$

Prop: $\mathrm{Ker}(f) \subset V$
$\mathrm{Im}(f) \subset W$ sono sottospazi

Dim: $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(v_1) = f(v_2) = 0$

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathrm{Ker}(f).$$

$w_1, w_2 \in Im(f) \qquad w_1 = f(v_1), \; w_2 = f(v_2)$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in Im(f). \qquad \blacksquare$$

Ricordo: $f : X \to Y$ è

iniettiva se $f(x_1) \neq f(x_2)$ per $x_1 \neq x_2$

suriettiva se $Im(f) = Y$.

Oss: anche per $f: V \to W$ lineare si ha f suriettiva $\iff Im(f) = W$.

Prop: f iniettiva $\iff Ker(f) = \{0\}$.

Dim: $\Longrightarrow$ $\quad Ker(f) = f^{-1}(0) = \{0\}$

$f^{-1}(0) \ni 0$ ma è ≤ 1 punti perché f iniettiva.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che $f(v_1) = f(v_2)$. Allora

$f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in Ker(f)$, ma $Ker(f) = \{0\}$

$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$. ▨

Indico con $O : V \to W$ la funzione che vale sempre 0

nuovo simbolo

Oss: $f = 0 \iff Im(f) = \{0\}$
$\iff Ker(f) = V$

Teorema (formula della dimensione):
se $\dim_{\mathbb{R}}(V) < +\infty$ e $f: V \to W$ è lin. allora

$$\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$$

Corollario: (1) se $\dim(W) < \dim(V)$
$f: V \to W$ lineare non può
essere iniettiva
(2) se $\dim(W) > \dim(V)$
$f: V \to W$ lineare non può
essere surgettiva.

Infatti: (1) $\underbrace{\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(\overbrace{f}^{W}))}_{\leq \dim(W) < \dim(V)} = \dim(V)$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(f)) > 0$
$\Rightarrow f$ non iniettiva.

(2) $\underset{\underset{0}{\not\approx}}{\dim(\operatorname{Ker}(f))} + \underset{\wedge}{\dim(\operatorname{Im}(f))} = \dim(V)$

$$\dim(V)$$
$$\wedge$$
$$\dim(W)$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \neq W \Rightarrow f$ non surgettiva.

---

(1) $f: V \to W$ lin. $\quad \dim(V) > \dim(W) \Rightarrow f$ non iniettiva.

(2) $f: V \to W$ lin $\quad \dim(V) < \dim(W) \Rightarrow f$ non surj.

<u>Dimo</u>: devo vedere $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$.

Chiamo $k = \dim(\mathrm{Ker}(f))$, $n = \dim(V)$.

Tesi: $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - k$.

Prendo $v_1, \dots, v_k$ base di $\mathrm{Ker}(f)$;
li completo a base $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ di V.
Afferma: $\underbrace{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)}_{n-k}$ è base di $\mathrm{Im}(f)$.

$n-k \Rightarrow$ ciò basta.

- stanno in $Im(f)$: ovvio
- generano: sia $w \in Im(f)$; cioè $w = f(v)$

$v \in V$; ma $v_1, \dots, v_n$ generano V

$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n$

$$\Rightarrow w = f(v) = \underbrace{\alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_{=0} + \dots + \alpha_k \underbrace{f(v_k)}_{=0}}_{=0} + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

- sono lin. indip.; sia $\alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0$.

devo vedere che allora $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Ma

$$f(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \mathrm{Ker}(f)$$

$$\Longrightarrow \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Longrightarrow -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\Longrightarrow (-\alpha_1 = \dots = -\alpha_k =)\ \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0. \quad \blacksquare$$

Oss: se esiste $f: V \to W$ lineare bigettiva allora $\dim(V) = \dim(W)$ (se una delle due è $< +\infty$)

$$\underbrace{\dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(f)}_{\{0\}})}_{0} + \dim(\underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{W}) = \dim(V)$$

Corollario: se $\dim(V) = \dim(W) < +\infty$, $f: V \to W$ lin. allora f iniettiva $\Longleftrightarrow$ f è suriettiva.

Infatti: $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V)$

iniettiva: $= 0 \Rightarrow \; = \dim(V) = \dim(W)$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = W.$

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{} = \dim(V)$$

iniettiva $\Leftarrow 0 \Leftarrow \dim(W) \Leftarrow W \Leftarrow$ suriettiva

$\dim(W)$

$\|$

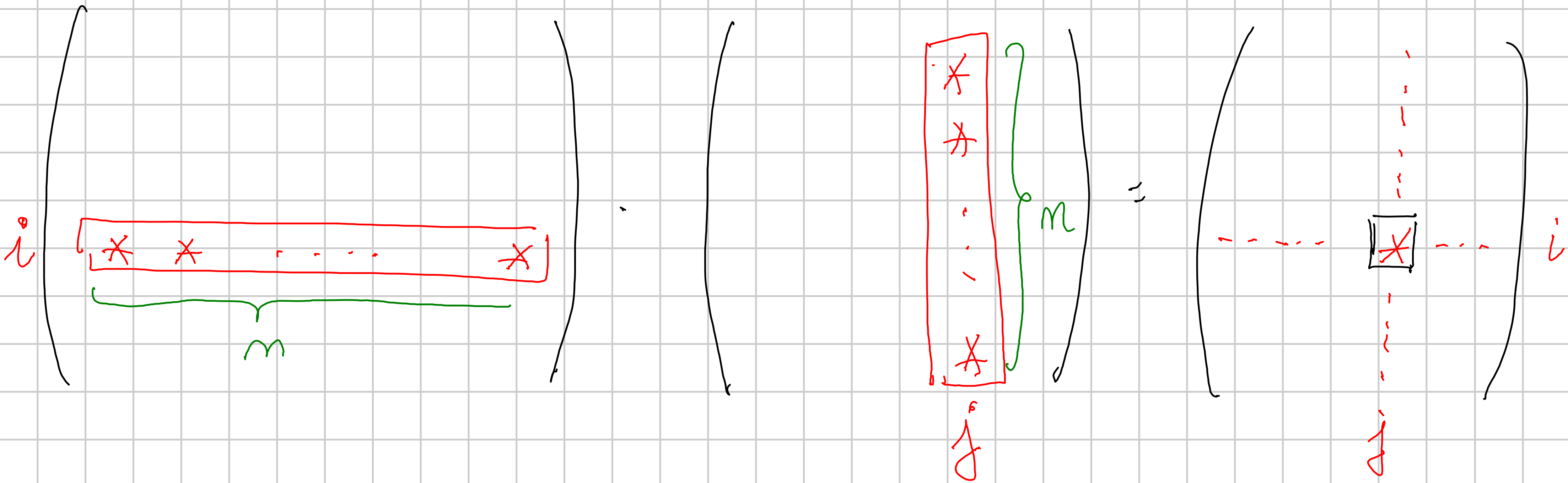
$\dim(V)$

Prodotto righe per colonne tra matrici.

Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$

definisco $A \cdot B \in M_{m \times k}$ così:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il} \cdot (B)_{lj}$$



Es:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2 \quad 3 \quad 7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & e & \sqrt{5} & 2\pi \\ 2 & \sqrt{3} & 7 & -31 \\ -2 & 4 & 0 & 28 \end{pmatrix}
$$

$2 \times 3 \qquad\qquad 3 \times 4$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & & 3 & \end{array} \\
2 & \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & * & \square \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 0$

Proprietà: (1) $\mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{n\times k} \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times k}$

$$(A, B) \longmapsto A\cdot B$$

è lineare in ciascun argomento:

a sinistra: $(\lambda A+\mu C)\cdot B=\lambda A\cdot B+\mu C\cdot B$

a destra: $A\cdot(\lambda B+\mu C)=\lambda A\cdot B+\mu A\cdot C$

(2) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ se

i prodotti hanno senso.

Verifiche: (1) a sinistra: $A, C \in M_{m\times m}$, $B \in M_{m\times k}$

$$\underbrace{\underbrace{(\lambda \overset{m\times m}{A} + \mu \overset{m\times m}{C})}_{m\times m} \cdot \overset{m\times k}{B}}_{m\times k} \overset{?}{=} \underbrace{\underbrace{\lambda \overset{m\times m}{A} \cdot \overset{m\times k}{B}}_{m\times k} + \mu \cdot \underbrace{\overset{m\times m}{C} \cdot \overset{m\times k}{B}}_{m\times k}}_{m\times k}$$

Ora basta vedere che hanno uguali i coeff.

negli altri posti:

$$\left((\lambda A+\mu C)\cdot B\right)_{ij}=\sum_{l=1}^{n}(\lambda A+\mu C)_{il}\cdot(B)_{lj}$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\left(\lambda(A)_{il}+\mu\,(C)_{il}\right)\cdot(B)_{lj}$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\left(\lambda(A)_{il}\cdot(B)_{lj}+\mu\,(C)_{il}\cdot(B)_{lj}\right)$$

$$=\lambda\sum_{l=1}^{m}(A)_{il}\cdot(B)_{lj}+\mu\sum_{l=1}^{n}(C)_{il}\cdot(B)_{lj}$$

$$= \lambda \cdot (A \cdot B)_{ij} + \mu \cdot (C \cdot B)_{ij}$$

$$= (\lambda \cdot A \cdot B + \mu \cdot C \cdot B)_{ij} \quad \checkmark$$

(2)

$$\underbrace{(\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{B}_{n \times k})}_{m \times k} \cdot \underbrace{C}_{k \times h} \overset{?}{=} \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{(\underbrace{B}_{n \times k} \cdot \underbrace{C}_{k \times h})}_{n \times h}$$

$$(A \cdot B) \cdot C : \ m \times h \qquad A \cdot (B \cdot C) : \ m \times h$$

Resta da vedere che in ogni posto (i,j) hanno stesso coeff:

$$((A\cdot B)\cdot C)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{k} (A\cdot B)_{i\alpha}\cdot (C)_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{m} (A)_{i\beta}\cdot (B)_{\beta\alpha}(C)_{\alpha j}$$

$$(A\cdot(B\cdot C))_{ij} = \sum_{\gamma=1}^{m} (A)_{i\gamma}\cdot (B\cdot C)_{\gamma j} = \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{k} (A)_{i\gamma}\cdot (B)_{\gamma\delta}\cdot (C)_{\delta j}$$

$\Longrightarrow$ <u>OK</u>

$\boxed{4.5.2}$ Verificare Grassmann per $V=\mathbb{R}^4$

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}5\\-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) \qquad Z = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}7\\0\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-2\\3\\5\end{pmatrix}\right)$$

$$\underbrace{\dim(W\cap Z)}_{\substack{\| \\ 1}} + \underbrace{\dim(W+Z)}_{\substack{\Downarrow \\ 3}} = \underbrace{\dim(W)}_{\substack{\| \\ 2}} + \underbrace{\dim(Z)}_{\substack{\| \\ 2}}$$

$$W \cap Z: \quad \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5\alpha + 3\beta - 7\gamma - 7\delta = 0 \\ -2\alpha + 4\beta + 2\delta = 0 \\ \alpha - \beta - 3\gamma - 3\delta = 0 \\ 3\alpha - 2\beta - 4\gamma - 5\delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta = \alpha - 2\beta \\ -2\alpha + 17\beta - 7\gamma = 0 \\ -2\alpha + 5\beta - 3\gamma = 0 \\ -2\alpha + 8\beta - 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = \alpha - 2\beta \\ 2\alpha - 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 12\beta - 4\gamma = 0 \\ 3\beta - \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 3\beta \\ \alpha = -2\beta \\ \delta = -4\beta \end{cases}$$

$W \cap Z$ è fatto dai vettori $-2\beta \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

cioè $\beta \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

$W \cap Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ +3 \\ +8 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W \cap Z) = 1$

Oss: se $w_1, \dots, w_k$ generano W

e $z_1, \dots, z_h$ generano Z

allora $w_1, \dots, w_k, z_1, \dots, z_h$ generano $W+Z$

$\Longrightarrow$ trovo una base di $W+Z$ estraendo:

Per noi:

$$W+Z = \operatorname{Span}\left(\overset{w_1}{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}} \overset{z_1}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}} \overset{z_2}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}} \right)$$

cerco di scrivere $z_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$:
non ci riesco $\Longrightarrow$ tengo z_1

cerco di scrivere z_2 come

$z_2 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \mu_1 z_1$

cioè cerco di risolvere

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = -\mu_1 z_1 + z_2$$

che è il sistema di sopra con

$$\alpha = \lambda_1 \quad \beta = \lambda_2 \quad \gamma = -\mu_1 \quad \delta = 1$$

$\Rightarrow$ ho soluz

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4}, \quad \mu_1 = +\frac{3}{4}.$$