

Esercitazione 23-10-18

Es. 4.2.26

Esibire una base di $V = F(\{a, b, c\}, \mathbb{R})$

$$f_1, f_2 \in V, (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \forall x \in \{a, b, c\}.$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, f \in V \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

-

Sia $f_a: \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f_a(a) = 1, f_a(b) = f_a(c) = 0$

Sia $f_b: \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}$ def. come $f_b(b) = 1, f_b(a) = f_b(c) = 0$

Sia $f_c: \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}$ def. come $f_c(c) = 1, f_c(a) = f_c(b) = 0$

Mostriamo che $\text{Span}(\{f_a, f_b, f_c\}) = V$.

Sia $f \in V, f: \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}$. Chiamiamo $\lambda_1 = f(a) \in \mathbb{R}$

$$\lambda_2 = f(b), \lambda_3 = f(c)$$

Mostriamo che $f = \lambda_1 \cdot f_a + \lambda_2 \cdot f_b + \lambda_3 \cdot f_c$

$$(\lambda_1 \cdot f_a + \lambda_2 \cdot f_b + \lambda_3 \cdot f_c)(a) = \lambda_1 \cdot \underbrace{f_a(a)}_{\text{"1"}} + \lambda_2 \cdot \underbrace{f_b(a)}_{\text{"0"}} + \lambda_3 \cdot \underbrace{f_c(a)}_{\text{"0"}}$$

$$= \lambda_1 \cdot 1 = \lambda_1 = f(a)$$

Similmente si verifica che $(\lambda_1 \cdot f_a + \lambda_2 \cdot f_b + \lambda_3 \cdot f_c)(b) = \lambda_2 \cdot \underbrace{f_b(b)}_{\text{"1"}} = f(b)$

$$(\lambda_1 \cdot f_a + \lambda_2 \cdot f_b + \lambda_3 \cdot f_c)(c) = \lambda_3 = f(c),$$

Mostriamo che f_a, f_b e f_c sono linearmente indipendenti.

Supponiamo che $\lambda_1 f_a + \lambda_2 f_b + \lambda_3 f_c = 0$ — il vettore nullo
di V , cioè

Mostriamo che $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono tutti nulli. la funzione f tale
che $f(x) = 0 \quad \forall$

$x \in \{a, b, c\}$.

$$(\lambda_1 \cdot f_a + \lambda_2 \cdot f_b + \lambda_3 \cdot f_c)(a) = 0$$

$$\lambda_1 \cdot f_a(a) + \lambda_2 \cdot f_b(a) + \lambda_3 \cdot f_c(a) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

" 1" 0" 0

Similmente si verifica che se $(\lambda_1 f_a + \lambda_2 f_b + \lambda_3 f_c) = 0$ allora $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Quindi f_a, f_b, f_c sono elementi linearmente indipendenti di $\mathcal{V}$. $\square$

Generalizzazione: esibire una base di

$\mathcal{F}_n = \{f: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}\}$. (vedendo per ind. e. su n o analogamente a quanto fatto ora).

Estrazioni di basi:

Estrarre dai vettori $v_1 \dots v_h$ assegnati una base dello spazio vettoriale V dato.

4.4.2. (f).

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0\}.$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ok

Osserviamo che $\dim(V) = 2$ poiché è definito da una equazione lineare omogenea in $\mathbb{R}^3$.

v_1 lo prendiamo perché $\neq 0$

$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $v_2 \in \text{Span}(v_1)$? $v_2 \notin \text{Span}(v_1)$.

Quindi $\{v_1, v_2\}$ sono una base di V .

• v_1, v_2 sono lin. indep. $\Rightarrow \dim(\text{Span}\{v_1, v_2\}) = 2$

e $\text{Span}\{v_1, v_2\} \subset V$, $\dim(V) = 2 \Rightarrow \text{Span}\{v_1, v_2\} = V$.

4.4.2: (b). $V = \mathbb{R}^3$.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

Si

No

No

Si

$$V_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, V_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}, V_7 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_8 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No

No

Si

$$\dim(V) = 3$$

$$V_3 \in \text{Span}(V_1) \text{ infatti } V_3 = -2 \cdot V_1$$

$V_4 \notin \text{Span}(V_1)$, quindi lo prendiamo.

$$V' = \text{Span}(\{v_1, v_4\}) \subseteq V = \mathbb{R}^3.$$

- $v_5 \in \text{Span}(\{v_1, v_4\})$, infatti $v_5 = v_1 + v_4$

$$\alpha v_1 + \beta v_4 + \gamma v_5 = 0 \text{ ha la soluzione } (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, -1)$$

- $v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}$ non va bene, poiché $v_6 \notin \text{Span}\{v_1, v_4\}$,

Infatti $v_6 = 2v_1 - v_4$.

Per verificare impostare il sistema $\alpha v_1 + \beta v_4 + \gamma v_6 = 0$

e vedere che $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, -1)$ è una soluzione non banale.

$v_7 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_7 \notin \text{Span}(v_1, v_4)$, poiché $\{v_1, v_4, v_7\}$
sont lin. indep.

Supponiamo $\alpha v_1 + \beta v_4 + \gamma v_7 = 0$. Otteniamo un sistema nelle incognite α, β, γ :

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 6\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 7\alpha - 5\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

} risolvere e verificare
che l'unica soluzione
è $\alpha = \beta = \gamma = 0$