

Algebra Lineare 23/10/18

V sp. vet. su $\mathbb{R}$.

$v_1, \dots, v_k$ lin. indep., $v_0 \in V$

$v_0, v_1, \dots, v_k$ lin. indep. $\Leftrightarrow v_0 \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

Visto: le n vettori linearmente indipendenti
sono una base.

Completamento: se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < +\infty$

$v_1, \dots, v_k$ l.i. indep; è possibile completarli a base, cioè aggiungere $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$ t.c.

$v_1, \dots, v_n$ siano base.

Giustizi; $v_1, \dots, v_k$ genuino?

Si: sono base

No: $\exists v_{k+1} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
ma allora $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ l.i.

$v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ generano! $\rightarrow$ S : sono base
 $\rightarrow$ No : $\exists v_{k+2} \notin \text{Span}(v_1 \dots v_{k+1})$
 $\Rightarrow v_1, \dots, v_{k+2}$ l.i.

Continuo ma devo fermarmi quando arrivo a n :
grazie alla Prop fond. $(v_1, \dots, v_k \text{ l.i.} \in \text{Span}(w_1 \dots w_h) \Rightarrow k \leq h)$

in V di $\dim = n$ ho $\leq n$ vett. l.i. $\square$

Es: $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ l.i.

Comunque io prendo $v_3 \notin \text{Span}(v_1, v_2)$ ho che

v_1, v_2, v_3 è base.

Ad es $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 0 \\ 5\alpha - \beta = 0 \\ -7\alpha + 9\beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 5\alpha \\ 23\alpha = 0 \\ \text{X} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha = 0 \\ &\Rightarrow \beta = 0 \end{aligned}$$

Cor: se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = m$ e $v_1, \dots, v_m \in V$
i seguenti fatti sono equiv:

- 1) $v_1, \dots, v_m$ sono base
 - 2) $v_1, \dots, v_m$ sono l.k. indep.
 - 3) $v_1, \dots, v_m$ generano
- } def. base

Cioè: se ho il numero giusto di vettori per avere una base basta chiedere "metta def. di base" per avere intera -

Es: $V = \mathbb{R}^2$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$. $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Basta verificare che sono lin. indip. per concludere che sono base: ovvio -

Dim (Con): (1) $\Rightarrow$ (2), (3) per t.f.

(2) So che posso completare $v_1, \dots, v_n$ a base
ma dopo il completamento sono n
 $\Rightarrow$ erano già base $\Rightarrow$ (1)

(2) So che posso estrarre da $v_1, \dots, v_n$ una base
che dopo sono $n \Rightarrow$ erano già base. $\square$

Cor: se $\dim(V) = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$ esiste in V
un insieme di vettori lin. indep. con k el'tri.

($V \neq \{0\}$ no: prendo $v_1 \neq 0$;
 $V \neq \text{Span}(v_1)$ no: prendo $v_2 \notin \text{Span}(v_1) \Rightarrow v_1, v_2$ l.i.
....)

Cor: se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e $W \subset V$ è s.t.s.p., allora
 $\dim(W) < +\infty$, anzi $\dim(W) \leq n$; vale = solo
se $W = V$.

Dimo: $\Rightarrow$ se $\dim(W) = +\infty$ in W avrei infinite l.i.
 $\infty > n$ vettori $\Rightarrow$ anche in V : contraddic. Prop. p.d.

$\Rightarrow$ Se $m = \dim(W)$, prendo base $w_1, \dots, w_m$
 $\Rightarrow w_1, \dots, w_m$ l.i. $\in V$ $\dim = n$

$\Rightarrow m \leq m$ (Prop. found).

•) Se $m = m$, $w_1, \dots, w_m$ l.i. in V

$\Rightarrow$ Sono base di $V \Rightarrow W = V.$



Ricordo: $W, Z \subset V$ stsp. $\Rightarrow W \cap Z$ è stsp

$W \cup Z$ solo se
 $W \subset Z$ o $Z \subset W$.

Def: chiamo $W+Z$ (somma) il $\text{span}(W \cup Z)$.

$$P_{\text{cop}}: W+Z = \{w+z : w \in W, z \in Z\}.$$

Dico: chiamo $S = \{w+z : w \in W, z \in Z\}$.

Devo vedere che:

1) $\mathcal{H} \supset \text{tsp}$, 2) $\mathcal{H} \supset W U Z$ 3) $\mathcal{H} \supset \bar{e} \text{ tsp}$
 $\mathcal{H} \supset W U Z$

Da fatti;

allora TDS.

1) Sia $A_1, A_2 \in S$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; deve vedere che
 $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in S$; $A_1 = W_1 + Z_1$
 $A_2 = W_2 + Z_2$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \underbrace{(\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2)}_{\substack{\cap \\ W}} + \underbrace{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}_{\substack{\cap \\ Z}} \quad \checkmark$$

2) $S \supset W \cup Z$ also $S' \supset W$ & $S' \supset Z$;

$$\text{Se } w \in W \text{ ha } w = \begin{pmatrix} w \\ \mathbb{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } z \in Z \text{ ha } z = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

3) Se T subsp. de $T \supset S \cup W$; logo vemos que

$T \supset S \text{ abc}$ do $x \in S$ $\hookrightarrow T \supset x$;

use $x = w + z$;

$$\left. \begin{array}{l} T \supset w \Rightarrow T \ni w \\ T \supset z \Rightarrow T \ni z \end{array} \right\} T \text{ at sp.} \Rightarrow T \ni w + z.$$

✓



Z, W sbsp. di $V \Rightarrow \dim Z \cap W, Z + W$ sbsp.

Prop (formule di Grassmann):

$$\dim(Z \cap W) + \dim(Z + W) = \dim(Z) + \dim(W).$$

Conseguenze:

- In $\mathbb{R}^3$ se ho W, Z piani ($\dim = 2$) posso
accader

$$W = Z \implies W \cap Z = W \cup Z = W = Z$$

- $W \neq Z \Rightarrow \bar{W} \cap Z \neq \emptyset$

$W + Z \rightarrow e^+ \mu^-$ plane

Luft: 1 Gramm Liter:

$$\underbrace{2}_{\text{dim } W} + \underbrace{2}_{\text{dim } Z} = \underbrace{2}_{\text{dim}(W \cap Z)} + \underbrace{2}_{\text{dim}(W + Z)}$$

• $\mathcal{U}$ in $\mathbb{R}^7$ W, Z subsp. t.c. $\dim W = 5$ $\dim Z = 4$

$$\text{Gr: } \underbrace{5 + 4}_{9} = \underbrace{\dim(W \cap Z)}_4 + \underbrace{\dim(W + Z)}_{7} \quad (Z \subset W)$$

dim $W \cap Z$ has $\dim \geq 2$.

Dimo (Grassmann): chiaro $k = \dim(Z \cap W)$
 $h = \dim(Z)$
 $t = \dim(W)$

Ter: $h + t = k + \dim(Z + W)$

cioè $\dim(Z + W) = h + t - k$

Prendo $v_1, \dots, v_k$ base di $Z \cap W$.

Sono lin. indep. in Z e in $W \Rightarrow$ posso completarli:

Trovo $v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_h$ base di W
 $v_1, \dots, v_k, z_{k+1}, \dots, z_t$ base di Z .

Affermo che

$\underbrace{v_1, \dots, v_k}_k, \underbrace{w_{k+1}, \dots, w_h}_{h-k}, \underbrace{z_{k+1}, \dots, z_t}_{t-k}$ sono base di $W+Z$.

(DOMANI)

$$k + h - k + t - k = h + t - k$$

$$\Rightarrow \ln(W + Z_1) = h + t - k$$

Cio' che volevo -