

Algebra Lineare 21/11/18

$$\det_n : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bullet \det_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

• esiste una e una sola funzione $\det_n : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ tr.

- lineare in ciascuna colonna
- cambia segno scambiando due colonne
- vale 1 su I_n .

Fatto : A invertibile $\iff \det(A) \neq 0$.

Teo (Binet) : $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Dimo (usando approccio assiomatico) :

• Se $\det(A) = 0 \Rightarrow A$ non inv. $\Rightarrow A$ non sur

$\Rightarrow A \cdot B$ non sur. $\Rightarrow A \cdot B$ non inv.

$\Rightarrow \det(A \cdot B) = 0 \Rightarrow \underbrace{\det(A \cdot B)}_0 = \underbrace{\det(A)}_0 \cdot \det(B)$.

• se $\det(A) \neq 0$ considero $f: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ dato da
 $f(B) = \frac{\det(A+B)}{\det(A)}$. Affermo che ha le 3
 proprietà del $\det_n$ ($\Rightarrow f = \det_n \Rightarrow$
 $\frac{\det(A+B)}{\det(A)} = \det(B)$.)

— linear nelle colonne:

$$B = (v_1, \dots, \alpha u_j + \beta w_j, \dots, v_n)$$

$$A \cdot B = (A \cdot v_1, \dots, \alpha A u_j + \beta A w_j, \dots, A \cdot v_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\det(A \cdot B)}{\det(A)} = \alpha \cdot \frac{\det(A \cdot (v_1, \dots, u_j, \dots, v_n))}{\det(A)}$$

$$+ \beta \cdot \frac{\det(A \cdot (v_1, \dots, w_j, \dots, v_n))}{\det(A)}$$

- scambio col $\Rightarrow$ cambio segno: stesso

$$- f(I_n) = \frac{\det(A \cdot I_n)}{\det(A)} = 1.$$



Altri fatti:

- $\det({}^t A) = \det(A)$
- il det non cambia se sostituisco una colonna con la stessa + multiplo altra
- stesso con le righe
- sviluppi di Laplace: fissato $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^{ji})$$

Teo : se $\det(A) \neq 0$ allora

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0;$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} \boxed{d} & \boxed{-b} \\ \boxed{-c} & \boxed{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ES}} : A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & -33 & -23 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 41 & 26 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} I \sim I - 5 \cdot II \\ III \sim III + 6 \cdot II \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \Rightarrow \text{sviluppo} \end{array} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -33 & -23 \\ 41 & 26 \end{pmatrix} = x$$

$$(A^{-1})_{12} = \frac{(-1)^{1+2}}{x} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{x}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \square & -\frac{1}{x} & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})_{31} = \frac{(-1)^{3+1}}{\alpha} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} = \frac{41}{2\alpha}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Teo: $(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}$.

Dimo: chiamo $B \in M_{n \times n}$ la matn. t.c.

$$(B)_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}.$$

Devo vedere che $A \cdot B = I_n$

cioè che $(A \cdot B)_{kj} = \delta_{kj}$.

$$(A \cdot B)_{kj} = \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{ij}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ki} \cdot \det(A^{ji})$$

per $k=j$ è esattamente lo
sviluppo di $\det(A)$ lungo riga j
 $\Rightarrow$ $\det(A)$

per $k \neq j$ è lo sviluppo lungo la riga j
della matrice ottenuta da A sostituendo
riga j con riga k

$\Rightarrow \det$ (matr con due righe uguali)

$\Rightarrow \Rightarrow \neq 0$

$= S_{kj}$



Q55: altre proprietà del det

- lineare in ciascuna riga
- scambiando due righe cambia segno -



Ricordo: $\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(A))$
= "max numero di col. lin. indep."

$$A \in \mathbb{M}_{m \times n}$$

Dato una matrice A chiamo

- sottomatrice B di A una ottenuta da A cancellando alcune righe e colonne

- una sottomatrice C di A è originale di una sottomatrice B se

- B è ottenuta da C cancellando una riga e una colonna

- C è ottenuta da B riaggiungendo una riga e una colonna di A .

ES:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & \pi & 7 \\ e & \sqrt{2} & 1 & 4 & 9 \\ -13 & 21 & \sqrt{5} & 29 & 0 \\ -1 & 4 & 77 & -11 & \sqrt{23} \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}$$

Annotations: Red arrows point down to the first, third, and fifth columns. A green arrow points down to the second column. Red arrows point left to the first, second, and fourth rows.

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 9 \\ 4 & \sqrt{23} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & \pi & 7 \\ \sqrt{2} & 4 & 9 \\ 4 & -11 & \sqrt{23} \end{pmatrix}$$

Annotations: The first row and second column of matrix C are highlighted in yellow.

Teo (degli orlati) : Sia $A \in M_{m \times m}$. Se
esiste $B \in M_{n \times n}$ sottomatrice di A t.c.

- $\det(B) \neq 0$

- $\det(C) = 0 \quad \forall C$ orlate di B

allora $\text{rank}(A) = n$,

Come calcolare $\text{rank}(A)$:

- se tutti i coeff. di A sono 0, $\text{rank}(A) = 0$
- altrimenti posso un coeff $\neq 0$ e guardo i suoi orbitali 2×2
- se tutti hanno $\det = 0 \Rightarrow \text{rank}(A) = 1$
- se non tutti hanno $\det = 0$ un posso uno con $\det \neq 0$ e guardo tutti i suoi orbitali 3×3

- se tutti hanno $\det = 0 \Rightarrow \text{rank}(A) = 2$
- Se non tutti hanno $\det = 0$ ne prendo uno con $\det \neq 0$ e prendo tutti i suoi orbitali 4×4 - - -

Es: se in una 4×5 ho trovato una 2×2 con $\det \neq 0$ ok o calcolo i det delle mie orbite 3×3 che sono:

$2 \cdot 3 = 6$, gave full e sottovetr. 3×3

so no $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 10 = 40.$

Es :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 0 & -3 & 12 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -18 & +2 \\ -16 & +20 \\ -3 & +15 \end{matrix} = -37 + 37 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 12 & -25 \\ +72 & -80 \\ +30 & -9 \end{matrix} = 114 - 114 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ -5 & -3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 12 & -6 \\ +100 & -96 \\ +5 & -15 \end{matrix} = 117 - 117 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 15 & -24 \\ +20 & -2 \\ +3 & -12 \end{matrix} = 38 - 38 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} = \dots = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} = \dots = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rank} = 2}$$

Tes: se in $A \exists B$ sottomat $n \times n$ con $\det(B) = 0$
e $\det(C) = 0 \quad \forall C$ isolato da $B \Rightarrow \text{rank}(A) = 2$.

Dim: se riordino le righe e le colonne di A ,
l'applicazione lineare associata è $Q \cdot A \cdot P$
con $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ permutazioni
delle coordinate, dunque biezioni lineari
 $\Rightarrow \text{rank}(Q \cdot A \cdot P) = \text{rank}(A)$.

Di seguito suppongo che B sia costituita dalle
prime π righe e π colonne di A :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} B \\ v_1, \dots, v_\pi \end{matrix}} & v_{\pi+1} \dots v_m \\ \alpha_{\pi+1,1} \dots \alpha_{\pi+1,\pi} & \alpha_{\pi+1,\pi+1} \dots \alpha_{\pi+1,m} \\ \vdots & \\ \alpha_{m,1} \dots \alpha_{m,\pi} & \alpha_{m,\pi+1} \dots \alpha_{m,m} \end{pmatrix}$$

So $\det(B) \neq 0$ e $\det(C) = 0 \quad \forall C$ oltre.

Poiché $v_1, \dots, v_r$ sono lin. indep. le prime r colonne di A sono lin. indep. $\Rightarrow \text{rank}(A) \geq r$.

Devo provare che le altre col. di A sono nel generato delle prime r . Lo faccio per la j -esima ($j > r$) - So che per ogni $i > r$

$$\det \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_n & v_j \\ \alpha_{i,1} & \dots & \alpha_{i,n} & \alpha_{ij} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \exists k_1^{(i)}, \dots, k_n^{(i)} \text{ t.c.}$$

$$\begin{pmatrix} v_j \\ \alpha_{ij} \end{pmatrix} = k_1^{(i)} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \alpha_{i,1} \end{pmatrix} + \dots + k_n^{(i)} \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

Da particolare $V_j = k_1^{(i)} \cdot V_1 + \dots + k_n^{(i)} \cdot V_n$

Ma $V_1, \dots, V_n$ sono lin. indep

$\Rightarrow V_j$ ha espressione unica come loro comb. lin.

$\Rightarrow k_1^{(i)}, \dots, k_n^{(i)}$ sono indep. da i

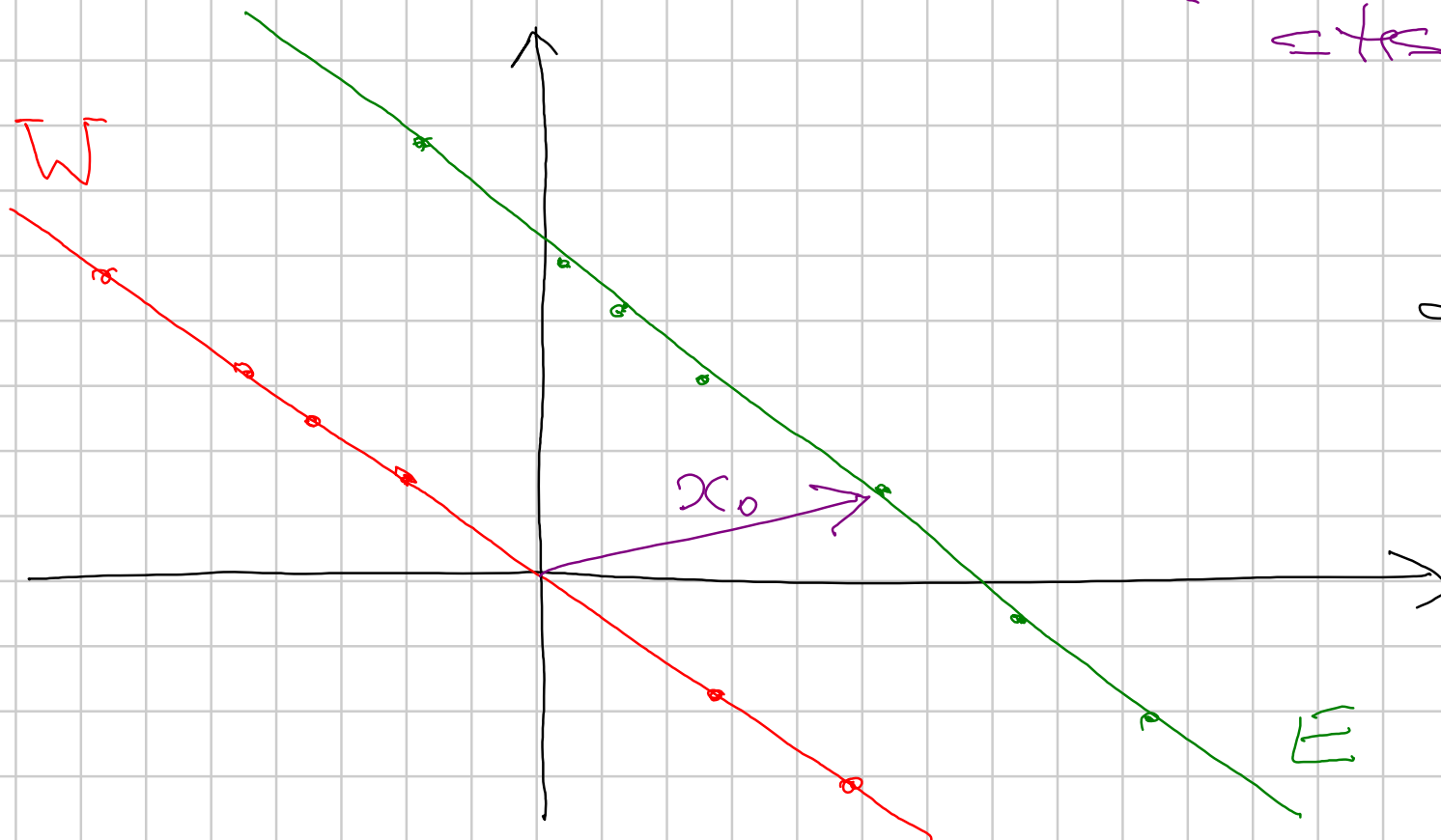
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_j \\ \alpha_{n+1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ \alpha_{n+1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} V_n \\ \alpha_{n+1,n} \\ \vdots \\ \alpha_{m,n} \end{pmatrix} \quad \square$$

Sottospazi affini.

Fisso V spazio vettoriale. Chiamo
sottospazio affine di V un sottoinsieme $E \subset V$
t.c. $\exists x_0 \in V, W \subset V$ sottospazio vett.
per cui $E = \{x_0 + w : w \in W\}$. Scrivo
 $E = x_0 + W$.

$$(W+Z = \{w+z : w \in W, z \in Z\})$$

$\subseteq \text{asse } w \text{ o } z \text{ idue.}$

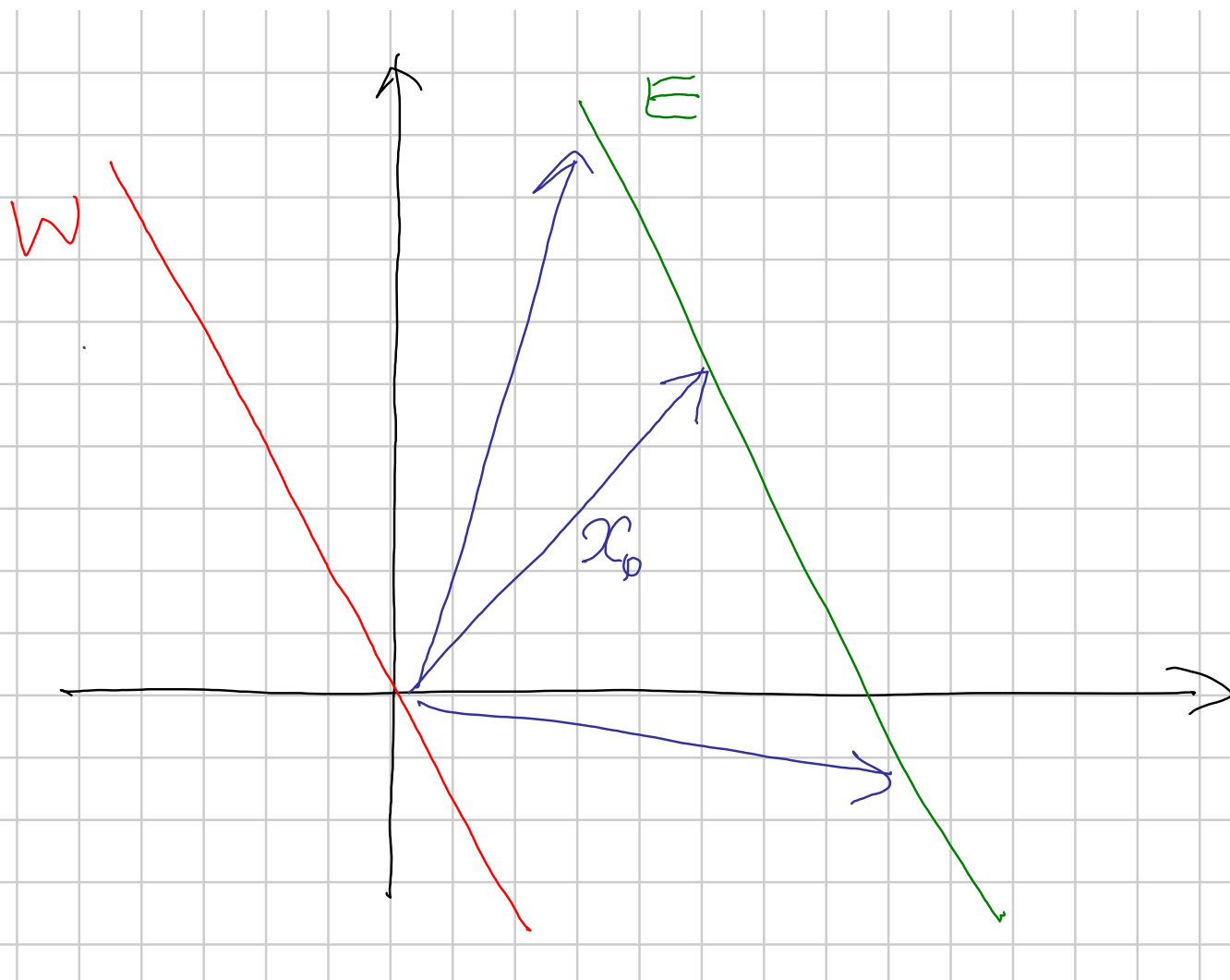


E è il traslato
 di W ssp. vett.
 rispetto a vettore x_0 .

Oss: in $\mathbb{R}^n$ sono sisp. affini

- i pt.
- le rette (anche non per 0)
- i piani (anche non per 0)
- $\mathbb{R}^3$

Q: se $E = x_0 + W$ tali x_0 e W sono unici?



Prop: $x_0 + W = y_0 + Z \iff y_0 \in x_0 + W \text{ e } Z = W.$

Dim: $\Leftarrow$: per ipotesi ho che $y_0 = x_0 + w_0$,
 $w_0 \in W$; allora
 $y_0 + Z = x_0 + w_0 + W = x_0 + (w_0 + W) = x_0 + W.$

$\Rightarrow$: $y_0 = y_0 + \underset{\in Z}{0} \in y_0 + Z = x_0 + W$

da cui $y_0 \in x_0 + W$.

Ovvero $y_0 = x_0 + w_0$ e analog. $x_0 = y_0 + z_0$
 $w_0 \in W$ $z_0 \in Z$.

Devo provare che $W = Z$.

Se $w \in W$ ho $x_0 + w \in x_0 + W = y_0 + Z$
 $\Rightarrow x_0 + w = y_0 + z$, $z \in Z$

$$\Rightarrow W = y_0 - x_0 + z = -z_0 + z$$

$$\Rightarrow W \in Z$$

$$\sum_{z \in Z} \quad \text{h.o.} \quad y_0 + z \in y_0 + Z = x_0 + W$$

$$\Rightarrow y_0 + z = x_0 + w \quad w \in W$$

$$\Rightarrow z = x_0 - y_0 + w = -w_0 + w$$

$$\Rightarrow z \in W$$



Def: se $E = x_0 + W$ chiamo W giacitura di E ;
propo $\dim(E) = \dim(W)$.