

Algebra Lineare 17/10/18

Teo: Se V ha basi, tutti le basi hanno stesso numero di elementi.

Basta.

Prop: $v_1, \dots, v_k$ lin indep. $\in \text{Span}(w_1, \dots, w_h)$
 $\Rightarrow k \leq h$.

Dimo: Per induzione su k .

Passo base ($k=0$: pouco significativo) : $k=1$.

v_1 lin indep. se $v_1 \neq 0$. Se fosse $k=0$

avrei $\text{Span}(w_1, \dots, w_h) = \text{Span}(\emptyset) = \{0\}$.

Não vale $v_1 \in \text{Span}(w_1, \dots, w_h)$: errado.

Depois $h \geq 1 = k$: passo base demonstrado.

Passo indutivo : hipótese indutiva :

$v_1, \dots, v_k$ lin indep $\in \text{Span}(w_1, \dots, w_h)$
 $\Rightarrow k \leq h$

Trovare $z_0, \dots, z_k$ lin. indep $\in \text{Span}(y_1, \dots, y_q)$;
devo verificare che $k+1 \leq q$.

Poiché $z_j \in \text{Span}(y_1, \dots, y_q)$ ho $z_j = \sum_{i=1}^q \alpha_{ji} y_i$.

Noto che $z_0 \neq 0$; dunque qualche coeff α_{0i}
per $i=1, \dots, q$ è $\neq 0$. Scambio eventualmente
l'ordine di $y_1, \dots, y_q$ e suppongo $\alpha_{0q} \neq 0$.

Ora posto $v_j = z_j - \frac{\alpha_{jq}}{\alpha_{0q}} \cdot z_0$, $j = 1, \dots, k$.

Affermo che:

(1) $v_1, \dots, v_k$ lin. indep.

(2) $v_1, \dots, v_k \in \text{Span}(y_1, \dots, y_{q-1})$

Assumendo ciò posso applicare ip. ind.:

$$\Rightarrow k \leq q-1 \Rightarrow k+1 \leq q \Rightarrow \underline{\underline{OK}}$$

Dimostrando quanto affermato:

(1) Considero una comb. lin $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = 0$;
verifico che ciò può accadere solo per $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$;

$$\beta_1 \left(z_1 - \frac{\alpha_{19}}{\alpha_{09}} z_0 \right) + \dots + \beta_k \left(z_k - \frac{\alpha_{k9}}{\alpha_{09}} z_0 \right) = 0$$

$$\Rightarrow (\dots) \cdot z_0 + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_k z_k = 0 ;$$

ma $z_0, z_1, \dots, z_k$ sono lin. indep. $\Rightarrow (\dots) = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ ✓

$$(2) \quad v_j = z_j - \frac{\alpha_{jq}}{\alpha_{0q}} \cdot z_0$$

$$= \sum_{i=1}^q \alpha_{ji} y_i - \frac{\alpha_{jq}}{\alpha_{0q}} \cdot \sum_{i=1}^q \alpha_{0i} y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_{ji} y_i + \cancel{\alpha_{jq} \cdot y_q} - \frac{\alpha_{jq}}{\alpha_{0q}} \cdot \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_{0i} y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{q-1} \left(\alpha_{ji} - \frac{\alpha_{jq}}{\alpha_{0q}} \alpha_{0i} \right) \cdot y_i \quad \checkmark$$

$$- \frac{\alpha_{jq}}{\alpha_{0q}} \cdot \cancel{\alpha_{0q} \cdot y_q}$$

Def: $\dim_{\mathbb{R}}(V) =$ il numero di vetti l. polinomi
base se ce ce sono, $+\infty$ altrimenti

Es: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[t]) = +\infty$
 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$.

Esercizi: esibire base dello spazio dato.

$$\boxed{4.2.6} \quad V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \right\}$$

(Fatto: $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$.)

eq. lin. $\Rightarrow$ è s.t.sp. di $\mathbb{R}^3$

Cerco $v, w \in \tilde{V}$ t.c. ogni $x \in \tilde{V}$ si scrive
in modo unico come $x = \alpha v + \beta w$. Noto
che se $x \in \tilde{V}$ ho $x_1 = \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{4}x_3$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{4}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è base di V ; oppure

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ è base : } x = \frac{x_2}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_3}{4} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$. $3-1=2$

Metodo: per trovare una base di uno sp. vet. V
si cerca di esprimere il generico elemento di V
tramite dei parametri da moltiplicare vettori;
quei vettori saranno la base.

$$\boxed{4.2.7} \quad \tilde{V} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0}_{\text{lin}}, \underbrace{-4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0}_{\text{lin}} \}$$

$$\begin{aligned}
 x \in \tilde{V} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 4x_1 - 7x_3 \\ 3x_1 + 8x_1 - 14x_3 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x_1 = 19x_3 \\ x_2 = 4x_1 - 7x_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{19}{11}x_3 \\ x_2 = \frac{76 - 77}{11}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{19}{11}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{11}x_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 15/11 \\ -1/11 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{x_3}{11} \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Dunque $\begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ è base di $\vec{V}$; dunque $\dim(V) = 1$.
 $\mathbb{R}$

$$3 - 2 = 1$$

"Prodotto": Se in $\mathbb{R}^n$ definisco una sottosp.
 con k eq. lin. om. ha $\dim n - k$

NON SEMPRE VERO :

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \left. \begin{array}{l} -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 - 14x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\dim = 2 \neq 3 - 2$$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\dim = 1 \neq 3-3$$

Def: Se $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ definisco le sue trasposte ${}^t A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ dove
 $({}^t A)_{ij} = (A)_{ji}$. Cioè ho scambiato righe
 e colonne.

Es: $A = \begin{pmatrix} \pi & -7 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & e \end{pmatrix}; {}^t A = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ -7 & \sqrt{3} \\ 1 & e \end{pmatrix}$

4.2.19

Esibire base di $\mathcal{S}_m = \{A \in M_{m \times m}(\mathbb{R}) :$

Oss: per quadrato: trasporre $\hat{=}$



$$\hat{=} A = A \}$$

matrice simmetrica

Es:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 7 & -1 \\ 7 & 0 & e \\ -1 & e & \sqrt{17} \end{pmatrix}.$$

Caso di esprimere una
generico $A \in \mathcal{S}_m$
tramite parametri che
moltiplicano opportune matrici.

$$A \in \mathcal{I}_n \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{nn} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ Q_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} + Q_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix} + \dots$$

$\dim(\mathcal{I}_n) = \# \text{ pa. liberi che determinano } A \in \mathcal{I}_n$

$$= n + (n-1) + \dots + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$



Base canonica di $M_{m \times n}(\mathbb{R})$:

$$E_{ij} = i \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$\dim(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n.$$

Base di $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le coord. di A rispetto a tale base della
moltiplica E_{ij} è a_{ij} .

Per I_n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \vdots \end{pmatrix} \dots E_{ii} \quad i=1, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ & & \ddots & \end{pmatrix} \dots E_{ij} + E_{ji}$$

$\parallel$ $\parallel$ $1 \leq i < j \leq n$

$E_{12} + E_{21}$ $E_{13} + E_{31}$

$$\dim(\mathfrak{f}_n) = n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4.2.20 $\mathfrak{a}_n = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : {}^t A = -A \}$

antisymmetrische

Es:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{7} & \boxed{2} \\ \boxed{-7} & \boxed{0} & \boxed{-\pi} \\ \boxed{-2} & \boxed{\pi} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$$X \in \mathcal{Q}_n \iff A =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & & \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots \\ -1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -1 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dim = \# \text{ par. liberi}$$

$$= (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$= n(n-1)/2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Base: $E_{ij} - E_{ji} \quad 1 \leq i < j \leq n$

$$\Rightarrow \dim = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$



Metodi di costruzione di basi

Lemma: Dati $v_1, \dots, v_k \in V$ lin. indep. e $v_0 \in V$ h.o.:

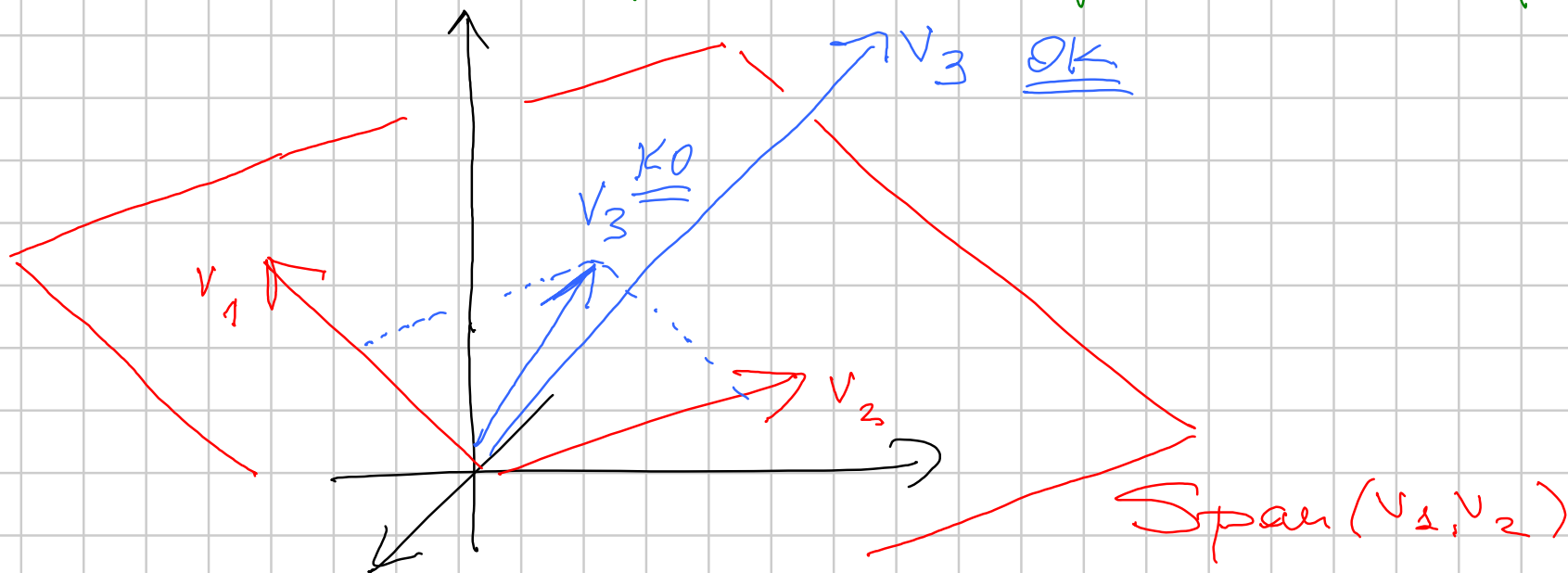
$$v_0, v_1, \dots, v_k \text{ lin. indep.} \iff v_0 \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_k).$$

$v_1, \dots, v_k$ lin. indep.?

$k=1$: $v_1 \neq 0$

$k=2$: v_1, v_2 non multiple between

$k=3$: v_1, v_2 lin. indep + $v_3 \notin \text{Span}(v_1, v_2)$



Dimo: Dimostrare le contronversive:

$$v_0, v_1, \dots, v_k \text{ lin. dip.} \iff v_0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$\implies$ Esistono $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli t.r.

$$\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0.$$

Se fosse $\alpha_0 = 0$ anche $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ No;

$$\text{quindi } \alpha_0 \neq 0 \implies v_0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_1 + \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} v_k$$

$$\implies v_0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \quad \checkmark$$



$$V_0 = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot V_0 + \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k = 0.$$

$\neq 0$

$\Rightarrow V_0, \dots, V_k$ lin. dp.
ordinati



Estrazione: dati $V_1, \dots, V_k$ ^{ordinati} **generatori** di V
il seguente procedimento conduce a una base di V :

- si scartano tutti i $V_1, V_2, \dots$ iniziali se nulli
fino a trovare il primo $V_{i_1} \neq 0$;

- dopo v_{i_1} scarto tutti i $v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, \dots$
che sono multipli di v_{i_1} , fino a trovare
il primo v_{i_2} non multiplo di v_{i_1} ;
- dopo v_{i_2} scarto tutti i $v_{i_2+1}, v_{i_2+2}, \dots$
che stanno in $\text{Span}(v_{i_1}, v_{i_2})$ fino
a trovare il primo $v_{i_3} \notin \text{Span}(v_{i_1}, v_{i_2})$

...

- dopo v_{i_p} scarto k i $v_{i_p+1}, v_{i_p+2}, \dots$
che stanno $\text{Span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ fino a
esaminare $v_1, \dots, v_k$ oppure al primo
 $v_{i_p+1} \notin \text{Span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ -

Base finale : $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$.

Es: in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -8 \\ 24 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1/3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 15 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) \\ \text{✓} & & & & & \text{✓} & & & & \end{array}$$

$\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ $v_1 + 2v_2$

$$\Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{base str. } \mathbb{R}^2$$

Perché è base?

- lin. indep. : aggiungo $v_{i_{p+1}} \notin \text{Span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$

dunque dal lemma la tesi

- generaco : affermo che se sono arrivato
a esaurire v_h il generato
di tutti quelli finiti finora è uguale a $\text{Span}(v_1, \dots, v_h)$

Cioè: ad ogni scatto non ho perso nulla
come per $\mathcal{B}$. Per $h=k$ cioè dice che
 $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
ma $\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = V$

L'affermazione discende subito da:
 $\text{Span}(v_0, v_1, \dots, v_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$



$$v_0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

Ese 1 : dimostrare a5

Ese 2 : usarlo per concludere -