

Esercitazione 17-10-18

4.2.10.

Esibire una base di $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\}$

Cerchiamo un insieme $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori di V

taali che:

① $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_k\}) = V$

② $v_1, \dots, v_k$ siano linearmente indipendenti.

Prendiamo $v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $v_1 \in V$ poiché $x_1 = 8, x_2 = 5$
e $5x_1 - 8x_2 = 0$

$$\text{Span}(v_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 8 \\ \lambda_1 \cdot 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\} \subset V, \text{poiché}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in V, v_2 \notin \text{Span}(v_1) \text{ poiché } x_3 = 5 \neq 0$$

$$\text{Span}(v_1, v_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 8 - \lambda_2 \cdot 2 \\ \lambda_1 \cdot 5 \\ \lambda_2 \cdot 5 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset V$$

In fatt. $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in V$, ma $v_3 \in \text{Span}(v_1, v_2)$

perché $x_4 = 5 \neq 0$

Scegliamo $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ definit. come sopra

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{8\alpha - 2\beta + 3\gamma}{5} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Sia $v \in V$, allora $v = \begin{pmatrix} 8\alpha - 2\beta + 3\gamma \\ 5 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ per una qualche scelta di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 8 - \lambda_2 \cdot 2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 \cdot 5 \\ \lambda_2 \cdot 5 \\ \lambda_3 \cdot 5 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$$

Scegliendo $\lambda_1 = \frac{\alpha}{5}$, $\lambda_2 = \frac{\beta}{5}$, $\lambda_3 = \frac{\gamma}{5}$, si ottiene

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = \frac{\alpha}{5} \cdot v_1 + \frac{\beta}{5} \cdot v_2 + \frac{\gamma}{5} \cdot v_3$$

Stiamo risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 8 - \lambda_2 \cdot 2 + 3 \cdot \lambda_3 = \frac{8\alpha - 2\beta + 3\gamma}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 5 = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot 5 = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 \cdot 5 = \gamma \end{cases}$$

• Verifichiamo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono lin. indipendenti

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$$

"

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 8 - \lambda_2 \cdot 2 + 3 \cdot \lambda_3 \\ \lambda_1 \cdot 5 \\ \lambda_2 \cdot 5 \\ \lambda_3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \cdot 8 - \lambda_2 \cdot 2 + 3 \cdot \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \cdot 5 = 0 \\ \lambda_2 \cdot 5 = 0 \\ \lambda_3 \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$. Quindi v_1, v_2, v_3 sono lin. indep.

4.2.24. Costruire una base di.

$$V = \left\{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] : p(-t) = -p(t) \right\}$$

funzioni dispari

(Verificare che V è uno spazio vettoriale)

Sia $p(t) = \sum_{i=0}^d \alpha_i \cdot t^i$. Osserviamo che

$$p(t) \in V \Leftrightarrow \forall i \text{ pari, } \alpha_i = 0. \quad (3t + 4t^3 - t^5 \in V)$$

mentre
($t^2 + t^3 \notin V$)

$$-p(t) = (-1) \cdot p(t) = \sum_{i=0}^d (-a_i) \cdot t^i$$

$$p(-t) = \sum_{i=0}^d a_i (-t)^i = \sum_{i=0}^d a_i \cdot (-1)^i \cdot t^i =$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pari}}}^d a_i \cdot t^i + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ dispari}}}^d -a_i \cdot t^i$$

$$p(-t) = -p(t) \Rightarrow \forall i \text{ pari } a_i = -a_i \Leftrightarrow \forall i \text{ pari } a_i = 0$$

Un generico $p(t) \in \mathcal{V}$ si scrive come

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ dispari}}}^d a_i \cdot t^i = a_1 \cdot t + a_3 \cdot t^3 + \dots + a_{2k+1} \cdot t^{2k+1}$$

i dispari

\ con $k \in \mathbb{N}$ massimo

tale che $2k+1 \leq d$

Verificare che $B = \{t, t^3, t^5, \dots, t^{2k+1}\}$ e' una base.

• Verifichiamo che sono linearmente indep.

$$a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + \dots + a_{2k+1} t^{2k+1} = 0 \quad \text{polinomio nullo}$$

$\Leftrightarrow a_i$ sono tutti nulli.

• Esercizio proposto:

Trovare una base di $V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] \mid p(-t) = p(t)\}$

Hint: rifare come sopra