

Algebra Lineare 16/10/18

V sp. vett. su $\mathbb{R}$.

$v_1, \dots, v_n$ lin. indep. se

l'unica loro comb. lin. con risultato nullo è quella con coeff. nulli

coe: dati $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c.
 $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

si ha per forza $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Dovrei dire "il sistema di vettori $v_1, \dots, v_n$ è linearmente indipendente".

Visto:

$v_1, \dots, v_n$ lin. indep. $\Leftrightarrow$ ogni $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$
si scrive in modo unico
come $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.



$$n=1$$

v lin. indep. se $\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$$\Leftrightarrow v \neq 0$$

$$n=2$$

v, w lin. indep.?

(di siano solo se entrambi non nulli.)

sufficiente (inoltre non devono essere multipli)

$$\text{ho cioè: } w = k \cdot v \quad k \cdot v - 1 \cdot w = 0$$

$$v \neq k \cdot w \quad 1 \cdot v - k \cdot w = 0.$$

Vi a vane: se sono lin dip. esistono

α, β non entrambi nulli t.c.

$$\alpha v + \beta w = 0 \quad \begin{array}{l} \Rightarrow w = -\alpha/\beta \cdot v \quad (\beta \neq 0) \\ \searrow v = -\beta/\alpha \cdot w \quad (\alpha \neq 0) \end{array}$$

Lemma: v, w lin. indep. $\Leftrightarrow$ non multipli fra loro.



4.1.1(c)

Dim se $v \in \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$ e se espr. è unica.

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^2)$$

Cerco α, β t.c. $v = \alpha w_1 + \beta w_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 3 \\ -11\alpha + 8\beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \frac{4}{3}\alpha \\ -11\alpha + 8 - \frac{32}{3}\alpha = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{65} \\ \beta = \frac{3 \cdot 65 - 4}{3 \cdot 65} \end{cases}$$

Sol, única -

$$4.1.2(c) \quad \mathbb{R}^3 \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Enco α, β t.c. $v = \alpha w_1 + \beta w_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 6\beta = 4 \\ -13\alpha + \beta = -2 \\ 8\alpha + 9\beta = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - 3\beta \\ -26 + 38\beta + \beta = -2 \\ 16 - 24\beta + 9\beta = 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 - 3\beta \\ 40\beta = 24 \\ 15\beta = 9 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 - 3\beta \\ \beta = 3/5 \end{array} \right. \\
 & & \Sigma_i, \text{única}
 \end{array}$$

4.1.5 (b)

Dine se $w_1, \dots, w_k$ geram W e se
 aqui $w \in W$ ha expr. única ...

$$W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verifico preliminarmente:

→ eq. lineare
⇒ W è ssp.

Mi chiedo se ogni
 $x \in W$ si possa scrivere
come $x = \alpha w_1 + \beta w_2$. Cioè:

stanno in W :

$$7 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 0 \quad \checkmark$$

$$7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = \alpha + 4\beta \\ x_3 = -2\alpha - \beta \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ \alpha = 2x_1 - x_2 \\ x_3 = -4x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1 \\ = -\frac{7}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ \alpha = 2x_1 - x_2 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Si' come cercato α, β dato $x \in W$ la soluzione trovata $\alpha = \dots$ $\beta = \dots$ va bene ed è unica.

(Se fossi partito ancora d.p. dato $x \in \mathbb{R}^3$
 qualsiasi avrei ottenuto risposte "non sempre"
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non soddisfa $7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow$
 w_1, w_2 non generano $\mathbb{R}^3$)

[4.1.7. (b)]

$$W = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$$

sp. vet.

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 1 - t + t^2 \\ w_2 &= 2 + 3t - 2t^2 \end{aligned} \right\} \in W$$

Preso $p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ cerco $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$p(t) = \alpha w_1 + \beta w_2$ - Supponiamo $p(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2$.

Voglio

$$k_0 + k_1 t + k_2 t^2 = \alpha (1 - t + t^2) + \beta (2 + 3t - 2t^2)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = k_0 \\ -\alpha + 3\beta = k_1 \\ \alpha - 2\beta = k_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta + k_0 & (\alpha = \frac{-2k_1 + 3k_0}{5}) \\ 2\beta - k_0 + 3\beta = k_1 & (\beta = \frac{k_1 + k_0}{5}) \\ -2k_1 + 3k_0 - 2k_1 - 2k_0 = 5k_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = \dots \\ \beta = \dots \\ k_0 - 5k_1 - 5k_2 = 0 \end{cases}$$

↪ uma relação tra k_0, k_1, k_2
de modo é sempre uma (ex. ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

No

4.2.2. (a)

Die x sono lin. indep.:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Non sono multipli fra loro $\Rightarrow \vec{r}_1$.

Esistono α, β non entrambi nulli t.c.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \iff \begin{cases} 5\alpha + 10\beta = 0 \\ 6\alpha + 12\beta = 0 \\ \alpha - 5\beta = 0 \quad \checkmark \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 5\beta \\ 25\beta + 10\beta = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta = 0, \alpha = 0$. No $\Rightarrow$ lin. indep.

4.2.4(a)

$\mathbb{R}[t]$

$$V_1 = -\frac{6}{5} + \frac{7}{15}t^3$$

$$V_2 = 4 - \frac{14}{9}t^3$$

$$V_2 \stackrel{?}{=} k \cdot V_1$$

$$4 = k \cdot -\frac{6}{5}$$

$$k = -\frac{10}{3}$$

$$-\frac{14}{9} \stackrel{?}{=} -\frac{10}{3} \cdot \frac{7}{15}$$

2

Linearmente dipendenti:

————— ∩ —————

Def: $(v_1, \dots, v_m) = \mathcal{B}$ è detto base di V
se $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indep. e generano V .

(l'ordine è implicito scrivendo $(v_1, \dots, v_m)$
e non $\{v_1, \dots, v_m\}$)

Visto: $(v_1, \dots, v_m)$ è base se e solo se ogni

$v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

Def: chiamo $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ vettore delle
coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ e lo
indico con $[v]_{\mathcal{B}}$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$; $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$; $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}$ è base. Cerco $[v]_{\mathcal{B}}$; cioè cerco $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta = -3 \\ 3\alpha + 4\beta = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - \frac{3}{2} \\ 3\beta - \frac{9}{2} + 4\beta = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{19}{14} \\ \alpha = \frac{19}{14} - \frac{3}{2} = \frac{1}{7} \end{cases} ; \quad \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} -1/7 \\ 19/14 \end{pmatrix}.$$

Esempio: In $\mathbb{R}^m$ ho la base

$$\mathcal{B}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 $\ell_1^{(m)}$ $\ell_2^{(m)}$ $\dots$ $\ell_{m-1}^{(m)}$ $\ell_m^{(m)}$

Canonica facoltativa

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^3.$$

Box: dato $x \in \mathbb{R}^n$ cerco coeff. t.c.

x sia comb. lin. di $e_1, \dots, e_n$ con quei coeff:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \boxed{x_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{x_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\Rightarrow [x]_{\mathcal{E}_m} = x$$

"le coordinate di $x \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica sono le sue componenti!"

Prop: $\mathbb{R}[t]$ non ha basi; anzi, non ha nessun insieme finito di generatori.

Dim: Supponiamo per assurdo che

$$R[t] = \text{Span} (p_1(t), \dots, p_m(t))$$

$$\text{Se } D = \max \{ \deg(p_j(t)) : j=1, \dots, m \}$$

$$\text{então } t^{D+1} \notin \text{Span} (p_1(t), \dots, p_m(t)).$$

Assunto - $\mathbb{R}$

Def: Se V for base, então V é de
dimensão finita.

Prop: se $B = (v_1, \dots, v_m)$ è una base di V

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$v \longmapsto [v]_B$$

è biettiva e rispetta le operazioni di spazio vett. (lo 0, il +, il $\cdot$).

Definizione: una base B è un dizionario
biunivoco tra V e $\mathbb{R}^m$ che rispetta le

Struttura di sp. vett $\Rightarrow V$ è uguale a $\mathbb{R}^n$
come V sp. vett. "

D'Imo: Iniettive

Se $[v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}}$, lo diciamo $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ho

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\implies v = w,$$

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Surgettive: dato $\alpha \in \mathbb{R}^n$ cerco $v \in V$ t.c.

$\alpha = [v]_{\mathcal{B}}$; basta porre $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

$$\underline{0} : [0]_{\mathcal{B}} = 0 ;$$

$$0 = \boxed{\textcolor{red}{0}} \cdot v_1 + \dots + \boxed{\textcolor{red}{0}} \cdot v_n$$



$$\underline{+} : [\alpha \cdot v + \beta \cdot w]_{\mathcal{B}} \neq \alpha \cdot [v]_{\mathcal{B}} + \beta \cdot [w]_{\mathcal{B}}$$

$\nearrow \nearrow \nearrow$ in V $\nearrow \nearrow \nearrow$ in $\mathbb{R}^n$

Chiamo $x = [v]_{\mathcal{B}}$, $y = [w]_{\mathcal{B}}$, dunque

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

$$\Rightarrow \alpha v + \beta w = (\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) v_n$$

$$\Rightarrow [\alpha v + \beta w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y.$$



①: $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^m$ per $m \neq m$ sono
 "uguali come sp. vettoriali" cioè

Esistono ispezioni che conservano
la struttura di sp. vet.?

A: No, tutti diversi per $n = 1, 2, 3, \dots$

Altrimenti: come insieme sono uguali:

Esistono ispezioni tra $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^m$ $\mathcal{H}_{m,m}$

Teo: Se V ammette basi, tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Es: tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ hanno n elementi (poiché E_n ha n elementi).

Es: $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ non sono basi di $\mathbb{R}^3$

Teo: Se V ammette basi, tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Es: tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ hanno n elementi (poiché E_n ha n elementi).

Es: $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ non sono basi di $\mathbb{R}^3$

Prop: se V, W hanno dimensioni finite, ho:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) \Leftrightarrow \exists f: V \rightarrow W$$

bijettiva che
rispetta la struttura
di sp. vett.

Dim: $\Rightarrow$ Se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W)$

prendo $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ base di W ; allora

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ [\cdot]_B & \searrow & \swarrow [\cdot]_E \\ & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

$$f = [\cdot]_E^{-1} \circ [\cdot]_B. \quad \checkmark$$

⇐ Se $B = (v_1, \dots, v_n)$ è base
di V ed esiste $f: V \rightarrow W$ che

rispetto le operazioni allora

$\mathcal{C} = (f(v_1), \dots, f(v_m))$ è base di W

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) \quad \square$$

Con: $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^m$ come sp. vett. se $n \neq m$.

Reste da provare: due basi di V
hanno stesso numero di elti.

Segue da:

Prop: Se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono lin. indep.
e $v_1, \dots, v_k \in \text{Span}(w_1, \dots, w_h)$
allora $k \leq h$.

Verifico che quanto basta: prendo due
basi $(v_1, \dots, v_m)$ e $(w_1, \dots, w_m)$ di V :

$v_1, \dots, v_m$ lin. indep

$w_1, \dots, w_m$ lin. indep

$v_1, \dots, v_m$ generano V

$w_1, \dots, w_m$ generano V

$$\Rightarrow m \geq m$$

$$\Rightarrow m \leq m$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{m = m.}}$$

Reste la proposition -