Algebra lineare 14/11/18

$\mathfrak{S}_n$ = permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$

$= \{ \sigma : \{1, 2, \ldots n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} \text{ biettive} \}$

$\# \mathfrak{S}_n = n!$

<u>Def</u>: dato $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ chiamo sua segnatura

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Oss: $\operatorname{sgn}(\sigma)$ prodotto di $\binom{n}{2}$ fattori al numeratore e al denominatore; al denominatore tutte le diff. $j-i$ con $i<j$; al numeratore le stesse però date cambiate di segno

$\Longrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$

Es: $\sigma = (4, 3, 1, 5, 2) \in \mathfrak{S}_5$

cioè $\sigma(1) = 4$ $\sigma(2) = 3$ $\sigma(3) = 1$ $\sigma(4) = 5$ $\sigma(5) = 2$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{(3-4)(1-4)(5-4)(2-4)(1-3)(5-3)(2-3)(5-1)(2-1)(2-5)}{(2-1)(3-1)(4-1)(5-1)(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)}$$

$$= + - - + - - - - + + = +$$

Fatto: $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta)$.

Def: chiamo trasposizione una permutazione che consiste nello scambio tra loro di due el. di $\{1, \dots, n\}$

Es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$.

$$\parallel$$
$$\tau_{3,7}$$

Fatto: ogni permutazione è composizione di trasposizioni.

Es: Basta vedere che data $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ posso trovare trasposizioni $\tau_1, \dots, \tau_k$ t.c. $\tau_k \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \sigma = id$ perché in tal caso ho $\sigma = (\tau_k \circ \dots \circ \tau_1)^{-1}$

$$= \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$$

$$\sigma = (7\ 1\ 5\ 4\ 2\ 6\ 3) \in \mathfrak{S}_7$$

$$(7\,1\,5\,4\,2\,6\,3) \xrightarrow{\tau_1} (1\,7\,5\,4\,2\,6\,3) \xrightarrow{\tau_2} (1\,2\,5\,4\,7\,6\,3)$$

$$\downarrow \tau_3$$

$$(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7) \xleftarrow{\tau_4} (1\,2\,3\,4\,7\,6\,5)$$

$$4 \text{ trasp} \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sgn}(\tau_4) = +1$$

<u>Fatto</u>: $\operatorname{sgn}(\text{trasp}) = -1$

Es: $$\operatorname{sgn}(\tau^{1,2}) = \frac{\overbrace{(1-2)}^{-}(3-2)(4-2)\ldots}{\underbrace{(2-1)}_{+}(3-1)(4-1)\ldots} = -1$$

$$(7154263) \xrightarrow{1} (1754263) \xrightarrow{2} (1574263) \xrightarrow{3} (1547263)$$

$$\downarrow 4$$

$$(1245763) \xleftarrow{7} (1425763) \xleftarrow{6} (1452763) \xleftarrow{5} (1457263)$$

$$\downarrow 8$$

$$(1235764) \xrightarrow{9} (1234765) \xrightarrow{10} (1234567).$$

σ = prodotto di 10 trasp.

<u>Oss</u>: se σ è prodotto di k trasp

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$. ($k$ non unico, sua parità sì)

Def: dato $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ chiamo determinante di A

$$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)} .$$

$n = 1$ $\quad S_1 = \{(1)\}$

$$\det_1(a) = \operatorname{sgn}(1) \cdot a = a .$$

$n = 2 \qquad \mathfrak{S}_2 = \{(1\,2), (2\,1)\}$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\operatorname{sgn}(1\,2)}_{\substack{\| \\ +1}} \cdot a_{11} \cdot a_{22} + \underbrace{\operatorname{sgn}(2\,1)}_{\substack{\| \\ -1}} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21} \quad \checkmark$$

$n = 3 \qquad \mathfrak{S}_3 = \{(1\,2\,3), (2\,3\,1), (3\,1\,2), (2\,1\,3), (3\,2\,1), (1\,3\,2)\}$

$$\begin{array}{cccccc} (1\,2\,3) & (2\,3\,1) & (3\,1\,2) & (2\,1\,3) & (3\,2\,1) & (1\,3\,2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

$$(2\ 3\ 1) \to (1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3)$$

$$(3\ 1\ 2) \to (1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3)$$

$$\det_3(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

è la regola di Sarrus.

Oss: Se $A \in M_{4\times 4}$, $\det_4(A)$ = somma di $4! = 24$ addendi tra cui

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (4\ \ 1\ \ 2\ \ 3) \qquad \sigma = (2\ \ 1\ \ 4\ \ 3)$$

$(4\,1\,2\,3) \to (1\,4\,2\,3) \to (1\,3\,2\,4) \to (1\,2\,3\,4)$

$- a_{14}\, a_{21}\, a_{32}\, a_{43}$ $\qquad + a_{12}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{43}$

<u>Prop</u>: $\det({}^tA) = \det(A)$

<u>Dim</u>: $\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} ({}^tA)_{j,\sigma(j)}$

$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$

riordino il prodotto ponendo

$i = \sigma(j)$, ovvero $j = \sigma^{-1}(i)$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}}_{\displaystyle \Updownarrow \ \sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n}} \underset{\displaystyle \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})}{\underset{\|}{\operatorname{sgn}(\sigma)}} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma^{-1}(i)} =$$

$\eta = \sigma^{-1}$

$$= \sum_{\eta \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\eta) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\eta(i)} .$$

$\blacksquare$

Sviluppi di Laplace

Data $A \in M_{n \times n}$ indico con A^{ij} la matrice ottenuta da A cancellando riga i e colonna j.

Es: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 2 \\ 5 & \pi & e & 8 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -6 \\ 13 & -4 & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\qquad A^{23} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 13 & -4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Fatto: fissato $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det_{n-1}(A^{ij})$$

Sviluppo lungo j-esima colonna

Es: svil. III col

$$\det(A) = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & \pi & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 13 & -4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot e \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 13 & -4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot \sqrt{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 5 & \pi & 9 \\ 13 & -4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{4+3} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 5 & \pi & e \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

__Oss__: ogni det 3×3 è somma di $6 = 3!$ addendi

$\longrightarrow$ vengono $4 \cdot 6 = 24 = 4!$ addendi.

__Fatto__: fissato $j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ji} \cdot \det_{n-1}(A^{ji})$$

sviluppo lungo riga j-esima.

Fatto: $A \in M_{n \times n}$ invertibile (cioè le colonne sono base di $\mathbb{R}^n$)

$$\Longleftrightarrow \det_n(A) \neq 0.$$

(Fornirò anche la formula per trovare A^{-1}.)

Approccio assiomatico alla def. di det.

$$\det_1(a_{11}) = a_{11} \qquad \det_2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det_3\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

<u>Proprietà</u>: 1) $\det_n(I_n) = 1$ $\quad (n = 1, 2, 3)$

2) scambiando due colonne il $\det_n$ cambia segno. $\quad (n = 1, 2, 3)$

3) $\det_n$ è una funzione lineare in ciascuna colonna fissate le altre: cioè

$$\det(v_1, v_2, \ldots, \alpha w_j + \beta u_j, \ldots, v_n)$$

$$= \alpha \det(v_1, \dots, w_j, \dots, v_n)$$

$$+ \beta \det(v_1, \dots, u_j, \dots, v_n). \qquad n = 1, 2, 3$$

Es: $\det\begin{pmatrix} x & \alpha z + \beta w \\ y & \alpha u + \beta t \end{pmatrix} = x \cdot (\alpha u + \beta t) - y(\alpha z + \beta w)$

$$= \alpha x u + \beta x t - \alpha y z - \beta y w$$

$$\alpha \det\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix} x & w \\ y & t \end{pmatrix}$$

$$= \alpha(xu - yz) + \beta(xt - yw) = \alpha x u - \alpha y z + \beta x t - \beta y w \quad \square$$

(Vero anche per le 3x3.)

Teo: per ogni n esiste una e una sola funz.

$$\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.}$$

1) $\det(I_n) = 1$
2) scambiando due colonne cambia segno
3) lineare in ciascuna colonna fissate le altre.

<u>Fatto</u>: tale funzione coincide con quella definita sopra tramite S_n.

<u>Oss</u>: dal secondo approccio segue facilmente che

$$A \text{ non invertibile} \Rightarrow \det(A) = 0$$

(ovvero $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertibile)

nota: vero anche il viceversa.

Infatti se A non è invertibile ho $A = (v_1 \dots v_n)$

$$v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow \det(A) =$$

$$= \alpha_1 \det(v_1, \dots, v_{j-1}, v_1, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n \cdot \det(v_1, \dots, v_{j-1}, v_n, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

tutti zero perché se due colonne sono uguali il det si annulla (scambiandole resta uguale e cambia segno).

<u>Prop</u>: il det non cambia se sostituisco una colonna con sé stessa più un multiplo di un'altra.

<u>Dim</u>: $A = (v_1, \dots, v_n)$

$\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \alpha v_i, \dots, v_n)$

$= \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$

$+ \alpha \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) = \det(A) + \alpha \cdot 0.$ ☒

<u>Cor</u>: il det non cambia sostituendo una

riga con sé stessa più un multiplo di un'altra.

(Infatti: $\det({}^tA) = \det(A)$
e trasponendo le colonne diventano righe.)

Tecnica di calcolo del det

- usare operaz. sulle colonne per ottenere molti (tutti tranne uno)

Zeri su una riga

- sviluppare lungo quella riga
- oppure viceversa

Es: $\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 7 & -3 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \ldots$

Uso I colonna per ottenere 0 sulla III riga (escluso posto 3,1)

$$= \det \begin{pmatrix} 4 & 19 & 10 & 9 \\ 5 & 18 & 22 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$IV \rightsquigarrow IV + ?\, I$

$III \rightsquigarrow III + 3 \cdot I$

$II \rightsquigarrow II + 4 \cdot I$

$$= (-1)^{1+3} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 19 & 10 & 9 \\ 18 & 22 & 7 \\ 3 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 13 & 5 & 8 \\ 18 & 11 & 7 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

ATTENZIONE: $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ <u>non</u> è lineare. (per $n \geq 2$)

$$\det(\alpha \cdot A) = \det(\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$$
$$= \alpha^n \det(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$= \alpha^{n} \cdot \det(A).$$

$\boxed{5.3.3}$ Verificare $(A \cdot B) C = A \cdot (B \cdot C)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -8 & 27 \\ -18 & 38 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & -5 & -40 \\ 154 & -27 & 68 \\ \vdots & -38 & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & -3 & 2 \\ 38 & -7 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & -5 & -40 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$\boxed{5.3.4}$ Trovare basi di Ker / Im di f_A

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(f_A) = \mathbb{R}^2$

$\dim \mathrm{Ker}(f_A) = 3-2 = 1$

$\mathrm{Ker}(A)$: $\begin{cases} 3x - 2y + 8z = 0 \\ 4x + y + 6z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4x - 6z \\ 11x + 20z = 0 \end{cases}$

base: $\begin{pmatrix} -20 \\ 14 \\ +11 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(f_A)$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \checkmark \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \checkmark \quad \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}}$ $\mathrm{I} + 3 \cdot \mathrm{II}$

$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -1 \\ 3\alpha + 2\beta = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$

$\ker(f_A)$:

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$3 = \dim \ker + \dim \operatorname{Im}$

$\dim \operatorname{Im} \geq 2$

scoperto $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ $v_3 = v_1 + 3v_2$

$v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$

$$(v_1 \ v_2 \ v_3)\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \ker f_A$ ha base $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\boxed{5.3.5}$ Date $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ $B \in \mathcal{M}_{k\times h}$

$$f : \mathcal{M}_{n\times k} \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times h}$$

$$X \longmapsto \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{X} \cdot \underset{k\times h}{B}$$

Provare che è lineare e trovare $\mathrm{Ker}(f)$.

$$f(\alpha X+\beta Y) = \big(A\cdot(\alpha X+\beta Y)\big)\cdot B$$

$$= (\alpha\cdot A\cdot X + \beta\cdot A\cdot Y)\cdot B$$

$$= \alpha \cdot A \cdot X \cdot B + \beta \cdot A \cdot Y \cdot B$$

$$= \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

$$X \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(X) = 0$$

$$\iff A \cdot X \cdot B = 0$$

$$\iff A \cdot X \cdot B \cdot v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\iff A \cdot X(w) = 0 \quad \forall w \in \mathrm{Im}(B)$$

$$\iff X(w) \in \mathrm{Ker}(A) \quad \forall w \in \mathrm{Im}(B)$$

Dunque $\mathrm{Ker}(f) = \{ X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k : X(\mathrm{Im}(B)) \subset \mathrm{Ker}(A) \}$

$\boxed{5.37}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ descrivere

$\{ B \in M_{2\times 2} : A \cdot B = B \cdot A \}$

Digressione: prodotto tra numeri è commutativo.

Tra matrici?

$$\underbrace{\underset{h\times k}{A}\cdot\underset{k\times h}{B}}_{h\times h} \overset{?}{=} \underbrace{\underset{k\times h}{B}\cdot\underset{h\times k}{A}}_{k\times k}$$

possibile solo se $k=h$ cioè

$A, B \in M_{k\times k}$.

La risposta comunque è "non sempre".

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A \iff \begin{cases} \cancel{2x} + z = \cancel{2x} + 3y \\ 2y + w = x - 4y \\ 3x - 4z = 2z + 3w \\ \cancel{3y - 4w = z - 4w} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 3y \\ x - 6y - w = 0 \\ \cancel{3x - 18y - 3w = 0} \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3y \\ w = x - 6y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sottosp. di dim $= 2$ con base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Noto che tra le B t.c. $A \cdot B = B \cdot A$

ci sono certamente: $B = I_2$, $B = A$.

In generale, per $A \in M_{2\times 2}$ ci sono 2 casi:

- $A = \alpha \cdot I_2 \Longrightarrow \{B : AB = BA\} = M_{2\times 2}$

- $A \notin \mathrm{Span}(I_2) \Longrightarrow \{B : A\cdot B = B\cdot A\} \supseteq \underbrace{\mathrm{Span}(I_2, A)}_{\dim = 2}$

vale sempre =

$\boxed{5.3.8}$

$\boxed{5.4.2}$ $\dim(V) \leq \dim(W) \Longrightarrow$

1) $\exists f : V \to W$ lin. iniettiva

2) Se $f : V \to W$ è iniettiva

$\exists g : W \to V$ t.c. $g \circ f = id_V$

Fare $\boxed{5.4.1}$

1) $\dim(V) = n$ $\dim(W) = m$ $n \leq m$

$v_1, \dots, v_n$ base di V

$w_1, \dots, w_m$ base di W.

So che assegnando $f(v_1), \dots, f(v_n)$ resta definita una unica f lineare; basta ora porre $f(v_i) = w_i \quad i = 1, \dots, n$ (posso perché $m \geq n$)

Per tale f la $g : W \to U$ t.c. $g \circ f = id$ è quella per cui

$$g(w_i) = v_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$g(w_i) = 0 \text{ a caso} \quad i = n+1, \dots, m$$

2) Data $f : V \to W$ iniettiva

prendo $v_1, \dots, v_n$ base di V; poiché f è iniettiva

$f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono lin indip.

$\Rightarrow$ Posso completarla a base $f(v_1), \dots, f(v_n), w_{n+1}, \dots, w_m$

di W. Basta scegliere $g : W \to V$ t.c.

$g(f(v_i)) = v_i \qquad i = 1, \dots, n$

$g(w_j) = \text{a caso} \qquad j = n+1, \dots, m$

$\boxed{5.4.3}$ Esibire $N \in M_{2\times3}$ con tutti i coeff $\neq 0$

t.c. $N \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = I_2$

E' la situazione di $\boxed{5.4.2 \text{ II parte}}$:

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ iniettiva

$(2 < 3)$

N = inversa sinistra : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Cerchiamo $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & u & t \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & u & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 1 \\ -3x + y + 6z = 0 \\ 2w + 5u - t = 0 \\ -3w + u + 6t = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 2x + 5y - 1 \\ 9x + 31y = 6 \\ t = 2w + 5u \\ 9w + 31u = 1 \end{cases}$$

Scelti x, w e così calcolo y, u, z, t

Altra domanda di $\boxed{5.4.3}$ = $\boxed{5.4.1 \text{ seconda parte}}$