Algebra lineare 13/11/18

$f : V \longrightarrow W$ $\qquad \mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}' \quad \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ $\qquad \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot N$

$$\Longrightarrow [f]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'} = N^{-1} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot M$$

Visto: modo compatto di definire $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$:

$$\boxed{f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}}$$

Infatti:

$$f\cdot(v_1,\dots,v_n) = (w_1,\dots,w_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

j-esima "col" : $f(v_j) = w_1 a_{j1} + \dots + w_m a_{jm}$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ji} w_j .$$

Ridimostro formula cambio base per $[f]$:

$$f\cdot\mathcal{B}' = \mathcal{C}'\cdot\boxed{} \qquad \mathcal{C}'[f]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}$$

$$\parallel$$

$$f\cdot\mathcal{B}\cdot M = \mathcal{C}\cdot[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\cdot M = \mathcal{C}'\,N^{-1}\cdot[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\cdot M$$

Dimostrazioni sintetiche:

• $[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$:

$$f(v) = \mathcal{C} \cdot \boxed{} \qquad \text{è } [f(v)]_{\mathcal{C}}$$

$$\|$$

$$f \cdot v = f \cdot \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

• $[g \circ f]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} = [g]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$:

$$(g\circ f)\cdot \mathcal{B} = \mathcal{C}\cdot \boxed{A} \qquad \text{è } [g\circ f]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$$

$$\parallel$$

$$g\cdot f\cdot \mathcal{B} = g\cdot \mathcal{C}\cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \mathcal{D}\cdot [g]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}\cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

Sistemi lineari

Sist. lin. di m equaz. in n incognite è:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\quad b_i \in \mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_n$ incognite.

Posto $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

scriviamo $A \cdot x = b$.

Risolvere $A \cdot x = b$ significa trovare <u>tutti</u> gli $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano $A \cdot x = b$.

<u>Def</u>: chiamo rango di A la dim. dell'immagine di A come appl. lin. cioè la dimensione del sottosp. di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.

cioè "il massimo numero di colonne lin. indip. di A".

Lo indico con $\operatorname{rank}(A)$.

Teo (Rouché - Capelli) :

$$A \cdot x = b \text{ ha soluz.} \iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\underbrace{A, b}_{\text{matrice completa}})$$

matrice incompleta

Dim : $A \cdot x = b$ ha soluz. $\iff b \in \operatorname{Im}(A)$

$\iff b \in \operatorname{Span}(\text{colonne di } A)$

$\iff \operatorname{Span}(\text{col di } A) = \operatorname{Span}(\text{col di } A, b)$

$\Longleftrightarrow \dim(\quad " \quad) = \dim(\quad " \quad)$

$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b)$. $\boxed{/\!/}$

Un sistema $A \cdot x = 0$ (cioè con $b = 0$) è omogeneo.

Soluz: $\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = 0\} = \operatorname{Ker}(A)$

(sottosp. vett; $\neq \emptyset$ poiché contiene 0).

Prop: se x_0 è una soluz. di $A \cdot x = b$ allora l'insieme di tutte le soluz è $\{x_0 + y : y \in \operatorname{Ker}(A)\}$.

"la soluz. generica di un sist. lin è data la una soluz. part + la soluz. generica del sist. omogeneo associato".

Dim: x_0 è soluz. se $A \cdot x_0 = b$

$$\{\text{tutte le soluz}\} = \{x : Ax = b\} = \{x : A \cdot x = A \cdot x_0\}$$
$$= \{x : A \cdot (x - x_0) = 0\}$$

posto $y = x - x_0$ ho $x = x_0 + y$

x soluz $\Longleftrightarrow$ y è soluz. dell'omogeneo. $\blacksquare$

Attenzione: un sist. non omogeneo può non avere soluz.

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1 \\ \text{———} \\ \sim \\ \vdots \end{cases}$$

__Chiamo:__ quadrato un sistema con $m = n$

sottodeterminato " con $m < n$

sovradeterminato " con $m > n$.

__Oss:__ se $A \in M_{m \times n}$ con $m < n$

$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \implies \operatorname{Ker}(A)$ ha dim pos.

__Conseguenza:__ un sistema omogeneo sottodeterminato ha sempre infinite soluzioni.

In generale il numero di soluz può essere:

	omogeneo	non omogeneo
sottodet	sempre infinite	nessuna o infinite
quadrato o sovradet.	una sola o infinite	una, nessuna o infinite

Q: come calcolare il rango di una matrice.

Q: come stabilire se $A \in M_{n \times n}$ è invertibile e come calcolare l'inversa.

Oss: Se $A \in M_{n \times n}$ è invertibile il sistema $A \cdot x = b$ ha sempre l'unica soluz. $x = A^{-1} \cdot b$.

Studiamo l'invertibilità di $A \in M_{n \times n}$ $n = 1, 2, 3$

$\boxed{n=1}$

$a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$ è inverso di a

se $a \cdot b = (1) = I_1 \in M_{1\times 1}$

cioè se $a \neq 0$ e $b = a^{-1}$

$\boxed{n=2}$ algebricamente

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cerco l'inversa $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$;

voglio che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \\ ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

$$x : \quad d \cdot \underline{I} - b \cdot \underline{II} : \quad x = \frac{d}{ad - bc}$$

$$z : \quad -c \cdot \underline{I} + a \cdot \underline{II} : \quad z = -\frac{c}{ad - bc}$$

y : $d \cdot \mathrm{III} - b\,\mathrm{IV}$; $y = -\dfrac{b}{ad-bc}$

w : $-c \cdot \mathrm{III} + a \cdot \mathrm{IV}$; $w = \dfrac{a}{ad-bc}$

(lecito se $ad-bc \neq 0$; esercizio: se $ad-bc=0$ la soluzione non c'è)

Dunque: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se $ad-bc \neq 0$ e in tal caso $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

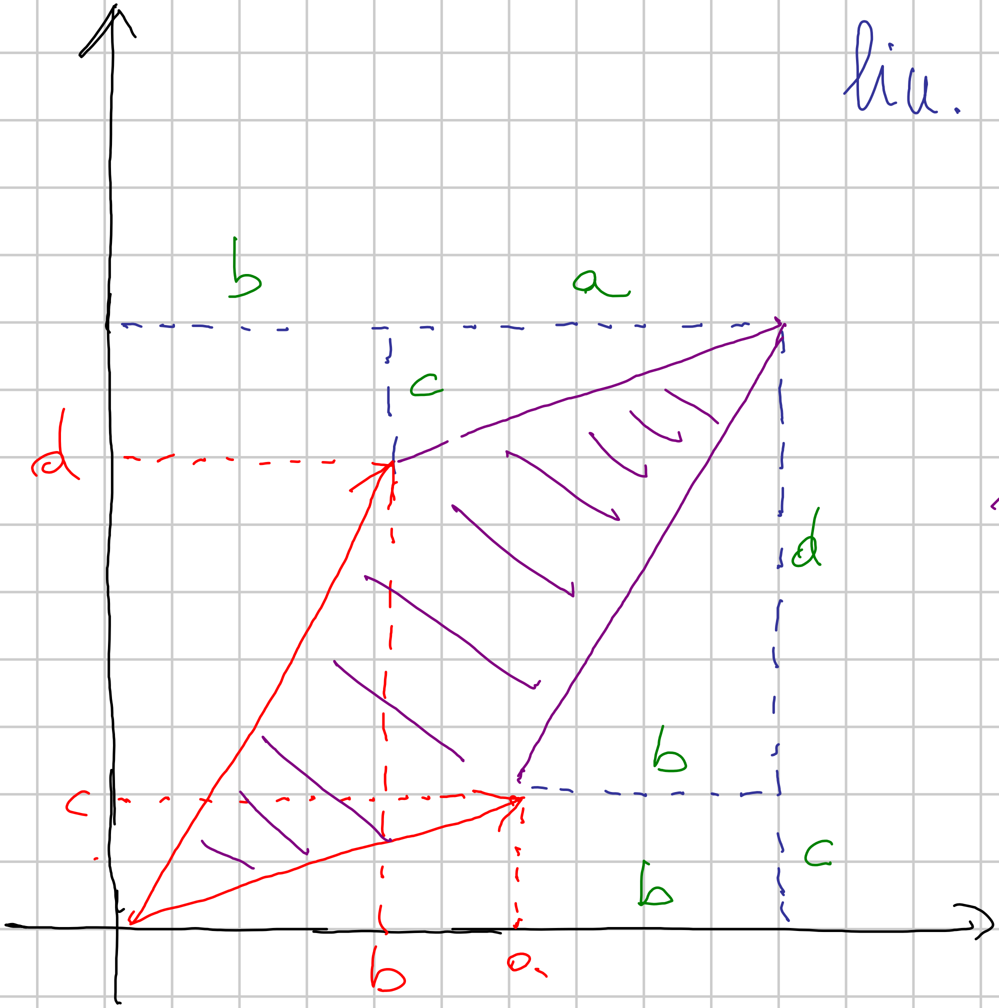
geometricamente $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A invertibile $\Longleftrightarrow$ A biiettiva come appl. lin.

$\Longleftrightarrow$ A surgettiva come appl. lin.

$\Longleftrightarrow$ le colonne di A sono base di $\mathbb{R}^2$

$\Longleftrightarrow$ le colonne di A sono lin. indip.



lin. indip "$\Longleftrightarrow$" $\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$

"$\Longleftrightarrow$" $cb \neq ad$

$\Longleftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

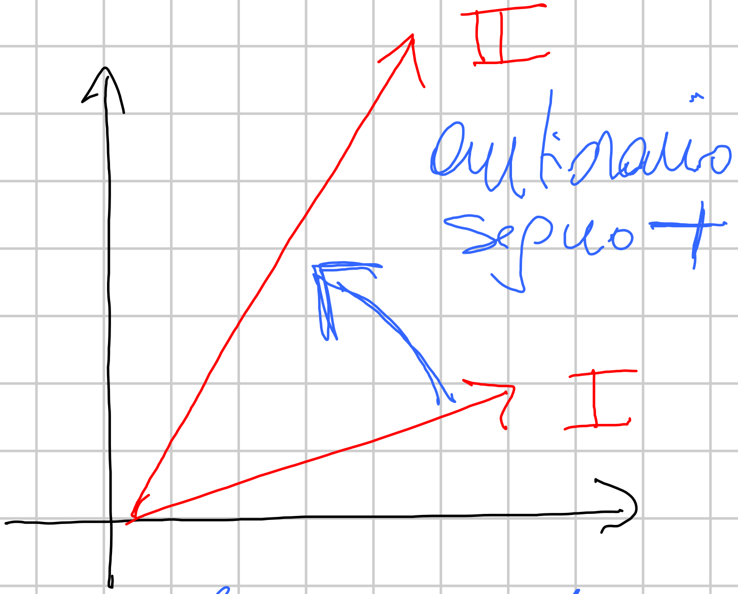
lin. indip. $\Longleftrightarrow$ area parallelogram $\neq 0$.

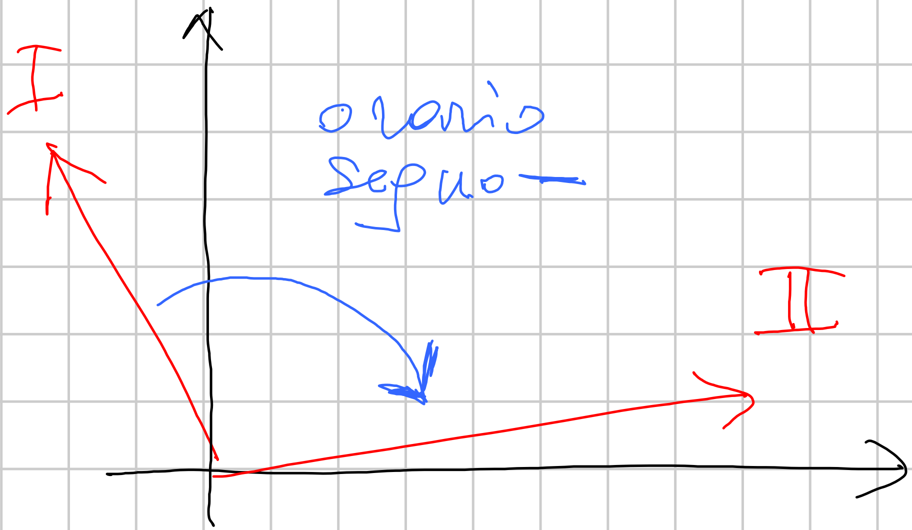
$$\text{Area}: (a+b)\cdot(c+d) - 2bc - 2\cdot\frac{1}{2}ac - 2\cdot\frac{1}{2}bd$$

$$= \cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd}$$
$$-2bc - \cancel{ac} - \cancel{bd}$$
$$= ad - bc$$

<u>Oss</u>: $ad - bc$ può essere < 0 dunque non è l'area: il suo valore assoluto è l'area; è un'area con segno che dipende dall'ordine dei vettori $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$.

(Scambiandoli cambio segno)



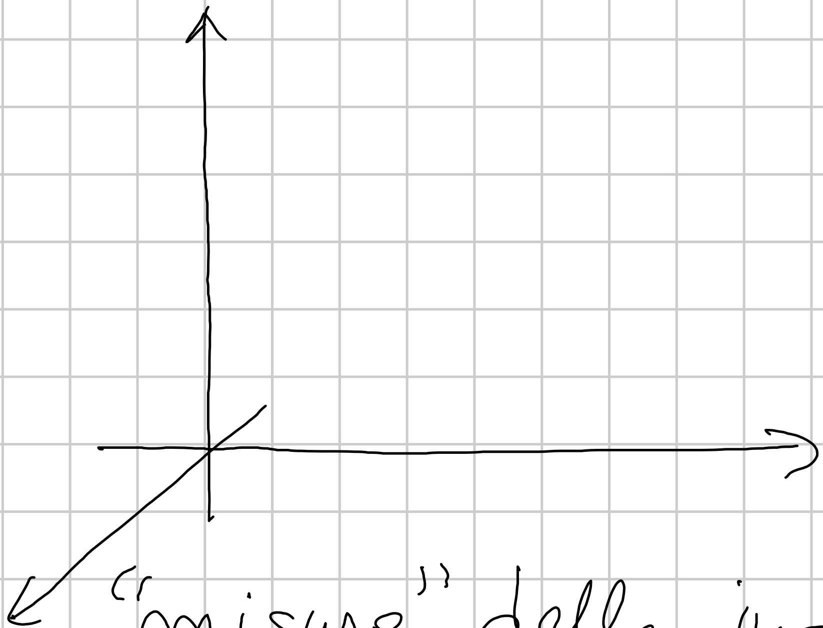


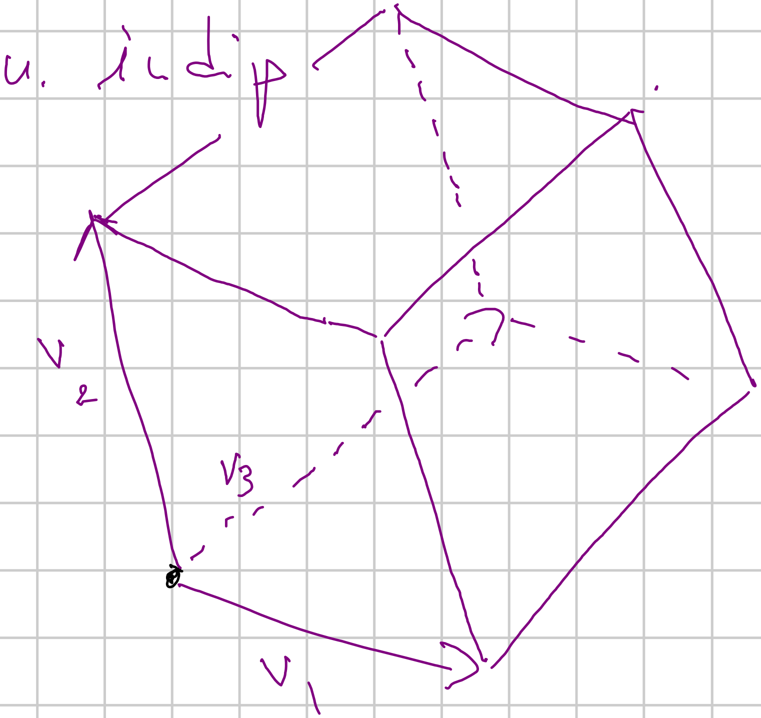
↑ = angolo $< \pi$ dal I al II

$\boxed{n = 3}$

$A = (v_1, v_2, v_3)$ invertibile

$\Longleftrightarrow$ v_1, v_2, v_3 lin. indip





"misura" della indip. lineare è "volume" del parallelepipedo di lati v_1, v_2, v_3.

Analogamente al caso 2D si esprime tale volume come differenza tra un par. retto e alcune piramidi rette e par. retti ... Risultato: volume con segno

Regola di Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

lo chiamo determinante di A, $\det(A)$

oppure $\det_3(A)$.

Riassumo:

$$\det_1(a_{11}) = a_{11}$$

$$\det_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\det_3(A) =$ Sarrus

Visto: $n = 1, 2, 3$ $\quad A$ invertibile $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

$n = 1, 2$ trovata inversa; $n = 3$ no.

Q: cosa fare per $n \geq 4$?

come calcolare l'inversa ~~se~~ esiste?

Scopo: estendere per n qualsiasi la def. di

$$\det_n : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

in modo che sia quello trovato a mano per $n = 1, 2, 3$ e in generale $\det_n(A) \neq 0$ $\iff$ A invertibile.

Digressione: $n = 3$ $\det(A) = \dots$

$=$ "volume" del parallelepipedo ...

Però: può essere negativo $\Rightarrow$ è "volume con segno".

Segno dipende dall'ordine: scambiando due colonne cambia segno:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + \boxed{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- \boxed{a_{13}a_{22}a_{31}} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Scambio ultime due colonne

$$a_{12} \longleftrightarrow a_{13}$$

$$a_{22} \longleftrightarrow a_{23}$$

$$a_{32} \longleftrightarrow a_{33}$$

Segno dato dalla regola della mano destra:

segno $> 0 \iff$ è possibile disporre

pollice	mano	dx	lungo	I	vett
indice	"	"	"	II	"
medio	"	"	"	III	"

altrimenti: $(\det = 0$ se $III \in \mathrm{Span}(I, II))$

$$\det_1 (a_{11}) = a_{11}$$

$$\det_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

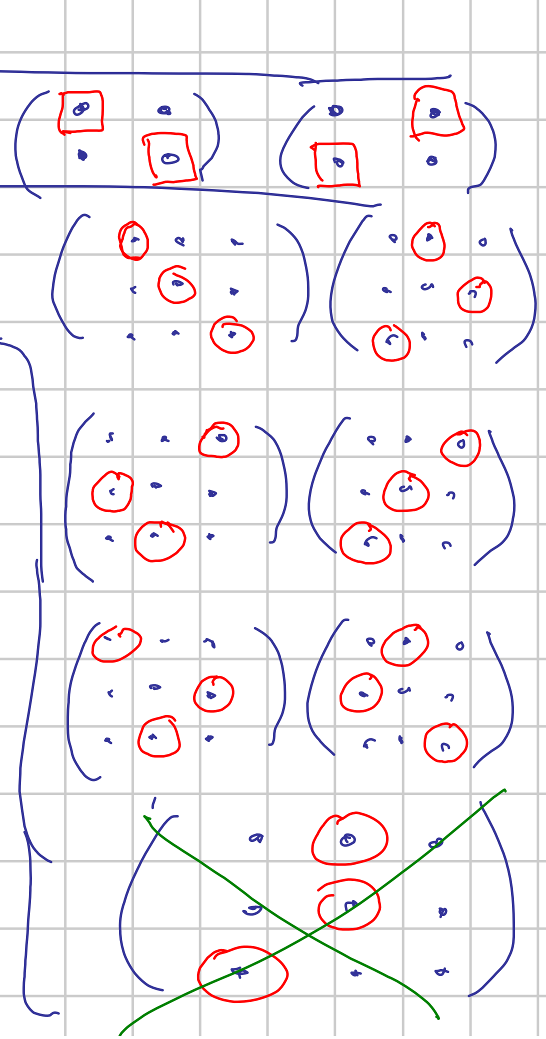
$$\det_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = $$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

	# addendi	# fattori per addendo	luoghi addendi
$n = 1$	1	1	$(\boxed{\cdot})$

$n=2$	2	2
$n=3$	6	3
n	$n!$	n



$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

In generale:

$\det_n(A)$ = somma di $n!$ addendi

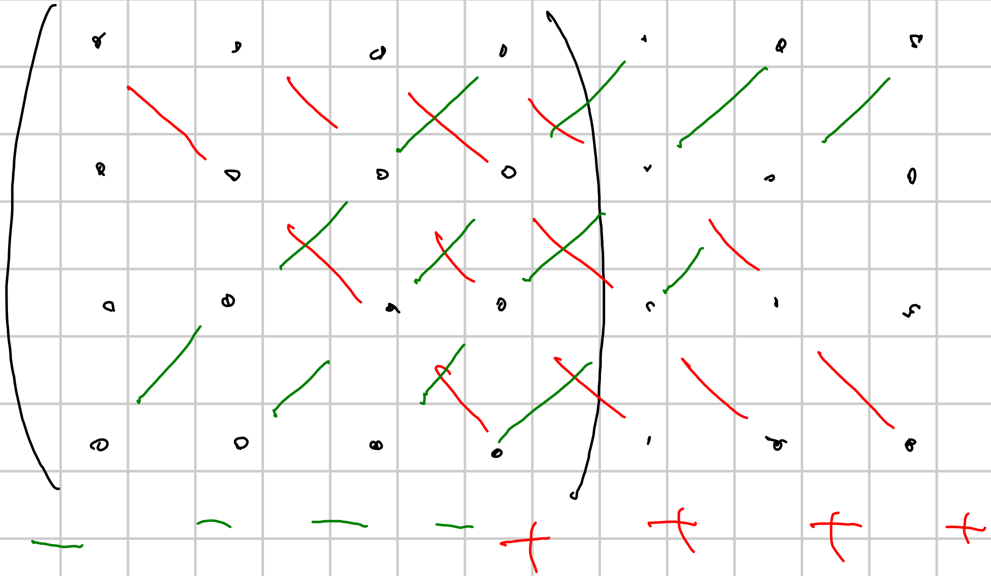
ogni addendo prodotto di n coeff. di A

presi su righe e colonne diverse,

con segno $\pm$.

Oss: $n=4$ ci sono $4! = 24$ addendi;

non esiste una regola di Sarrus per $n=4$



SBAGLIATO

Chiamo <u>permutazione</u> dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ una funzione $\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bigettiva (cioè un modo di ordinare $\{1, 2, \dots, n\}$).

Indico con $\mathfrak{S}_n$ l'insieme di tutte le permutazioni di $\{1, 2, \dots, n\}$.

<u>Oss</u>: $\# \mathfrak{S}_n = n!$