

Esercitazione 12/12

7.3. Nello spazio $\mathbb{R}^n$ dato, determinare la posizione reciproca dei sotto spazi affini E ed F dati.

Calcolare la dimensione di $E, F, E \cap F, E + F, \dots$

7.3.6. $\mathbb{R}^3$

$E: \{3x - 5y + 2z = -1\}$ - piano affine $\dim(E) = 2$

$F: \{4x + 2y - 7z = 8\}$ - piano affine $\dim(F) = 2$

W, acritura di E $W = \{3x - 5y + 2z = 0\}$ (1)

Z giacitura di F $Z = \{4x + 2y - 7z = 0\}$ (2)

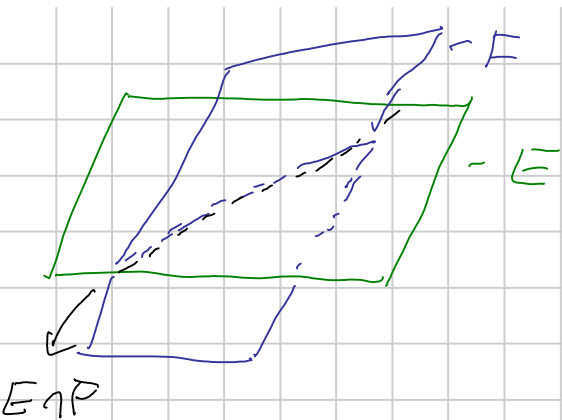
$W \neq Z$ poiché le equazioni (1) e (2) sono indipendenti.

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim(W+Z) = 3 \quad \text{rk} 2 \quad W+Z = \mathbb{R}^3$$

$$\dim(W \cap Z) = 1$$

$$W \cap Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 3x - 5y + 2z = 0 \\ 4x + 2y - 7z = 0 \end{array} \right\}$$



EnF

Per descrivere EnF è sufficiente trovare una soluzione particolare $v_0 \in EnF$, $v_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Possiamo cercare v_0 con $z=0$

Risolvi il sistema

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow \text{soluzione}$$

$$x = \frac{19}{23}$$

$$y = 4 - 2 \cdot \frac{19}{23}$$

Esiste una soluzione particolare $v_0 \in E \cap F$

$$E \cap F = \{v_0 + V \cap W\}, \dim(E \cap F) = 1$$

$$E + F = v_0 + (V + W), \dim(E + F) = 3$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(E) & + & \dim(F) & = & \dim(E \cap F) & + & \dim(E + F) \\ \overset{''}{2} & & \overset{''}{2} & & \overset{''}{1} & & \overset{''}{3} \end{array}$$

7.3.8. $\mathbb{R}^3$

$$E: \{2x - 5y + 3z = 1\} - \dim(E) = 2$$

$$F: \begin{cases} x = -2 + t - s \\ y = 1 + t + 5s \\ z = 7 + t + 9s \end{cases} \quad - \dim(F) = 2$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

$$W \text{ giacitura di } F \quad W = \{2x - 5y + 3z = 0\}$$

$$Z \text{ giacitura di } F \quad Z = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ v_1 & v_2 \end{matrix}$

$$v_1 \in W \quad 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0.$$

$$v_2 \in W \quad 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 5 + 3 \cdot 9 = 0, \quad \text{quindi } Z \subset W, \text{ ma } \dim(Z) = \dim(W)$$

$\begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix}$

perbunto $W = Z$. Quindi E ed F sono spazi affini
paralleli.

2 casi possibili: $\circ E = F \circ E \cap F = \emptyset$

Prendiamo $v_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \in F$, verifichiamo se soddisfa

l'equazione cartesiana che definisce $E = \{2x - 5y + 3z = 1\}$

$$2(-2) - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 12 \neq 1.$$

Perbunto $E \cap F = \emptyset$, sono piani paralleli distinti in $\mathbb{R}^3$.



$$E + F = \mathbb{R}^3$$

poiché $W = \mathbb{Z}$

$$\dim(E+F) = 1 + \dim(W+Z) = 1 + \dim(W)$$

7.3.10. $\mathbb{R}^3$.

$$E: \begin{cases} 3x - 2y + 2z = -1 \\ 4x - 3y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{--- rekte in } \mathbb{R}^3 \quad \dim(E) = 1$$

$$F: \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 2t \\ z = 7 - 3t \end{cases} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \sum_{\text{par}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \dim(F) = 1.$$

$$W = \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 2z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{non soddisfa la prima equazione che definisce } W$$

$$Z = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin W \quad 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 15 - 4 - 6 = 5 \neq 0$$

$$W \cap Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ mentre } \dim(W + Z) = 2$$

• Determiniamo $E \cap F$. Ci chiediamo se $\exists t \in \mathbb{R}$ che verifichi le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} 3(3+5t) - 2(-1+2t) + (7-3t) = 1 \\ 4(3+5t) - 3(-1+2t) + 5(7-3t) = 12 \end{cases}$$

$$\vdots \text{sviluppiamo}$$

→ sostituendo
la forma parametrica
per F nelle equazioni
che definiscono E .

$$\begin{cases} 8t = -17 \\ t = 38 \end{cases} \text{ il sistema non ha soluzioni}$$

Pertanto $E \cap F = \emptyset$. E ed F sono rette sghembe

$$E + F = \mathbb{R}^3; \quad \dim(E+F) = \dim(\underbrace{W}_{3} + \underbrace{Z}_{2}) + 1$$

7.3.12. $\mathbb{R}^4$.

$$E: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2 + 5t \\ w = 3 - t \end{cases} \quad - \dim(E) = 1$$

$$F: \begin{cases} x + 2y + 4z - 3w = 2 \\ 2x - 3y + 5z - 4w = 11 \end{cases} \quad - \dim(F) = 2.$$

$$W = \text{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{cases} x + 2y + 4z - 3w = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4w = 0 \end{cases}$$

$\parallel$
 V_0

$v_0 \notin Z$ poiché non soddisfa le equazioni che definiscono Z .

$$W \cap Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dim(W+Z) = 3$$

• $E \cap F$. Esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} -1+3t \\ 1-4t \\ 2+5t \\ 3-t \end{pmatrix} \in F$.

Cerchiamo una soluzione al seguente sistema

$$\begin{cases} (-1+3t) + 2(1-4t) + 4(2+5t) - 3(3-t) = 2 \\ 2(-1+3t) - 3(1-4t) + 5(2+5t) - 4(3-t) = 11 \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} 18t = 2 \\ 47t = 18 \end{cases} \text{ non ha soluzioni}$$

Per tanto $E \cap F = \emptyset$

$$E + F = \mathbb{R}^4$$

$$\dim(E + F) = \dim(W + Z) + 1. \quad \square$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{"} \\ 3 \end{matrix}$