

Esercitazione 11/12/18

7.2. Nello spazio $\mathbb{R}^n$ assegnato, considerare il sottospazio affine E , trovando equazioni parametriche quando ne sono assegnate di cartesiane e viceversa.

Es. 7.2.1. $\mathbb{R}^2$. $E: \{4x + 5y = 3\}$ - retta affine nel piano

① Cerchiamo una soluzione particolare $v_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$4x + 5y = 3 \rightarrow x = \frac{3 - 5y}{4}. \text{ Scegliamo } y = 1, \text{ otteniamo}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Prendiamo } v_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

② Cerchiamo una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo associato:

$$4x + 5y = 0. \text{ Ad esempio possiamo prendere}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Forma parametrica

$$E = \left\{ v_0 + t \cdot v_1 \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + t \cdot 5 \\ 1 - 4 \cdot t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

7.2.2. $\mathbb{R}^2$ $E = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ - retta affine in } \mathbb{R}^2$$

① Cerchiamo l'equazione cartesiana di $\text{Span} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} = V$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 5x + 6y = 0 \right\}$$

② Sostituiamo $v_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\uparrow$ e otteniamo $5 \cdot 7 + 6 \cdot 1 = 41$

L'equazione cartesiana di E è

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 5x + 6y = 41 \right\}$$

7.2.4. $E \subset \mathbb{R}^3$

$$E : \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 7 \\ 5x + y + 6z = -9 \end{cases} \rightarrow \text{retta in } \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{poich\u00e9}$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & -2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 2$$

⑦ Cerchiamo una soluzione particolare $v_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $z=0$.

↳ possiamo farlo poiché $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

Cerchiamo soluzione di:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x + y = -9 \end{cases} \dots \rightarrow x = -\frac{34}{13}, y = \frac{53}{13}$$

Prendiamo $V_0 = \begin{pmatrix} -\frac{34}{13} \\ \frac{53}{13} \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) Cerchiamo una soluzione $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non nulla del sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \end{cases} \dots \text{Soluzione } v_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ -22 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Forma parametrica: $v_0 + \text{Span}(v_1)$

$$E = \left\{ v_0 + t \cdot v_1 \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{34}{13} \\ 53 \\ \frac{13}{13} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20t \\ -22t \\ -13t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\downarrow$ sol. particolare $\downarrow$ giacitura

7.2.6. $E \subset \mathbb{R}^3$.

$$E = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\text{Span} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{generatore}} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ - retta in } \mathbb{R}^3.$$

① Cerchiamo equazioni cartesiane per $V = \text{Span} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 3x + 6y = 0 \\ 3z + 4y = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 3x + 6y + 0 \cdot z = 0 \quad 1a \\ 0 \cdot x + 4y + 3 \cdot z = 0 \quad 2a \end{array} \quad |$$

② Sostituiamo $v_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$ nelle equazioni di V

$$3 \cdot 5 + 6 \cdot (-2) = 3 \quad \text{- 1a equazione}$$

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -5 \quad \text{- 2a equazione}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 3x + 6y = 3 \\ 4y + 3z = -5 \end{array} \right\}$$

$$7.2.8. \quad E \subset \mathbb{R}^3. \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 8x + 9y - 6z = 5 \right\}, \text{ piano affine in } \mathbb{R}^3$$

① Cerchiamo una soluzione particolare $v_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; con $y = z = 0$

$$8x = 5, \quad x = \frac{5}{8} \quad v_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 8x + 9y - 6z = 0 \right\}$ - giacitura di E .

Cerchiamo una base per V .

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \rightarrow \text{base per } V$

Parametrizzazione: $E = \{v_0 + \text{Span}(v_1, v_2)\} =$

$$= \left\{ v_0 + t \cdot v_1 + s \cdot v_2 \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5/8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

7.2.10. $E \subset \mathbb{R}^3$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - \text{piano affine in } \mathbb{R}^3.$$

$$\text{Sia } V = \text{Span} \left(\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}} \right) - \text{giacitura di } E.$$

Cerchiamo equazioni cartesiane per V .

Cerchiamo un'equazione del tipo $ax+by+cz=0$ che sia soddisfatta contemporaneamente da v_1 e da v_2 .

Quindi cerchiamo una soluzione non nulla (a,b,c) al sistema seguente:

$$\begin{cases} 4a - b + 3c = 0 \\ 2a + 7b + c = 0 \end{cases}$$

→ una soluzione non nulla è data da
 $(a,b,c) = (-11, 1, 15)$

Pertanto $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -11x + y + 15z = 0 \right\}$.

Sostituiamo le coordinate di $V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$ in $\uparrow$ e
otteniamo $-11 \cdot 2 - 1 + 15 = -8$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -11 \cdot x + y + 15z = -8 \right\}.$$

7.3. Nello spazio $\mathbb{R}^n$ dato, determinare la posizione reciproca dei sottospazi affini E ed F assegnati.

Indicate con W e Z le loro giaciture, calcolare le dimensioni di E , F , $E \cap F$, $E + F$, $W + Z$, verificando le relazioni che intercorrono fra di loro.

7.3.2. $\mathbb{R}^3$. $E: \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 1 + 7t \\ z = -4 + t \end{cases}$ - retta in $\mathbb{R}^3$, $\dim E = 1$.

$F: \{9x + 4y - 5z = 2\}$ - piano in $\mathbb{R}^3$, $\dim F = 2$.

• W giacitura di E , $W = \text{Span} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Z giacitura di F $Z = \{9x + 4y - 5z = 0\}$

• $W + Z = \mathbb{R}^3$, poiché $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \notin Z$. Infatti: $9 \cdot (-3) + 7 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = -4 \neq 0$

• $E \cap F$ è dato un punto, poiché E ed F sono una retta

e un piano (rispettivamente) non paralleli in $\mathbb{R}^3$.



- Per trovare $E \cap F$ sostituiamo l'espressione parametrica di E nelle equazioni cartesiane per F , cercando una soluzione.

Cerchiamo $t \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 5-3t \\ 1+7t \\ -4+t \end{pmatrix} \in F$, cioè

$$9 \cdot (5 - 3t) + 4(1 + 7t) - 5(-4 + t) = 2 \dots -4t = -67 \quad t = \frac{67}{4}$$

$$\dim E \cap F = 0 \quad E \cap F = \{v_0\}$$

$$E + F = \mathbb{R}^3 \quad E + F = v_0 + (V + W)$$

giacitura di $E + F$

$$\begin{array}{ccccccc} \dim E & + & \dim F & = & \dim(E \cap F) & + & \dim(E + F) - \left[\begin{array}{l} \text{caso in cui} \\ E \cap F \text{ non vuoto} \end{array} \right] \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & & 2 & & 0 & & 3 \end{array}$$

7.3.4. $\mathbb{R}^3$

$$E: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \rightarrow \text{retta in } \mathbb{R}^3 \quad \dim(E) = 1$$

$$F: \{7x - 5y - 2z = 1\} \rightarrow \text{piano in } \mathbb{R}^3, \dim(F) = 2.$$

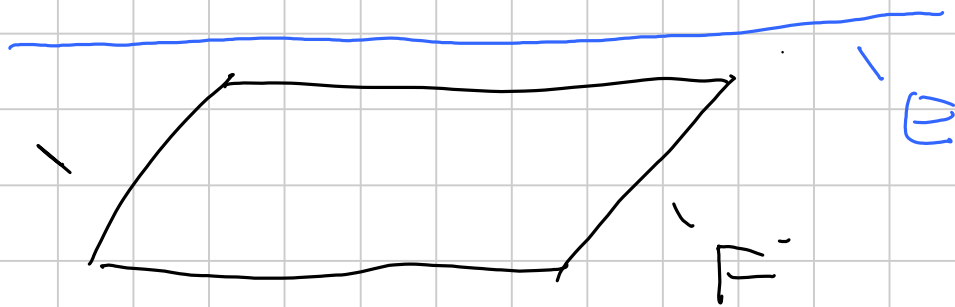
- W giacitura di E , $W = \text{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Z giacitura di F $Z = \{7x - 5y - 2z = 0\}$

- Osserviamo che $W \subset Z$, poiché $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \in Z$ ($7 \cdot 3 - 5(5) - 2 \cdot (-2) = 0$)
- 2 casi possibili: $\circ E \subset F$, oppure $E \cap F = \{\emptyset\}$, e $E + F = \mathbb{R}^3$.

• Verifichiamo che $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in E$, ma non appartiene ad F .

$$7 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = 27 \neq 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin F \Rightarrow E \cap F = \emptyset$$



Formula dim. spazi affini (caso in cui $E \cap F = \emptyset$)

$$\dim(E+F) = \dim(W+Z) + 1$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \dim(Z) \\ \parallel \\ 2 \end{array}$$