

Algebra lineare 10/10/18

Principio del minimo: se $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$
allora A ha minimo, cioè $\exists m \in A$ t.c.
 $m \leq a \quad \forall a \in A$.

Div. euclidea: dati n, m numeri interi con $m > 1$
esistono unici q, r interi t.c. $n = m \cdot q + r$

$$e \quad 0 \leq r < m$$

dividendo divisore quoziente resto

Es: $19 : 3 \rightarrow 19 = 3 \cdot 6 + 1$

~~$19 = 3 \cdot 5 + 4$~~

(dimostrare usando il princ. del min.)

2.3.15

Dati $f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t]$ con $\deg(g(t)) > 0$

esistono unici

$$q(t), r(t) \text{ t.c. } f(t) = q(t) \cdot g(t) + r(t)$$

$$\text{con } 0 \leq \deg(r(t)) < \deg(g(t))$$

Es: $x^3 : x^2 + 1 \rightarrow x^3 = (x^2 + 1) \cdot x + (-x)$

Unicità: supponiamo di avere $q_1(t), r_1(t), q_2(t), r_2(t)$

$$f(t) = g(t) \cdot q_1(t) + r_1(t)$$

$$\deg(r_1(t)) < \deg(g(t))$$

$$f(t) = g(t) \cdot q_2(t) + r_2(t)$$

$$\deg(r_2(t)) < \deg(g(t))$$

$$\Rightarrow 0 = g(t) \cdot (q_1(t) - q_2(t)) + r_1(t) - r_2(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{r_2(t) - r_1(t)}_{\deg < \deg(g(t))} = \underbrace{g(t) \cdot (q_1(t) - q_2(t))}_{\text{or } q_1(t) - q_2(t) \neq 0}$$

$$\deg < \deg(g(t))$$

$$\text{or } q_1(t) - q_2(t) \neq 0 \\ \text{ho } \deg \geq \deg(g(t))$$

Imponi $q_1(t) - q_2(t) = 0$ cioè $q_1(t) = q_2(t)$
e $x_1(t) = x_2(t)$: ho provato l'unica -

Esistenza : se $f(t)$ è multiplo di $g(t)$,
ho $f(t) = g(t) \cdot q(t)$, per $x(t) = 0$.

Se $f(t)$ non è multiplo di $g(t)$ considero...

Idea: dati $f(t), g(t)$ cerco $q(t), r(t)$
t.c. $f(t) = g(t) \cdot q(t) + r(t)$ e $\deg(r(t)) < \deg(g(t))$

Idea: span un "quoziente" e caso $h(t)$
che dà "resto" $f(t) - g(t) \cdot h(t)$.

Sare' giusto se del "resto" ha il minimo
grado possibile.

Pongo $A = \{ \deg(f(t) - g(t) \cdot h(t)) : h(t) \in \mathbb{R}[t] \}$

sottinsieme non vuota di $\mathbb{N}$. Ho minimo m ,
 ottenuto da $h(t)$ che diacono $q(t)$ e

pongo $r(t) = f(t) - g(t) \cdot q(t)$.

Resta da vedere che $\deg(r(t)) < \deg(g(t))$,

Supponiamo p.a.

$$a(t) = a_k t^k + \dots$$

$$g(t) = b_p t^p + \dots$$

$$k \geq p$$

$$a_k t^k + \dots = f(t) - g(t) - q(t)$$

$$\text{Dico } f(t) - g(t) \cdot \left(q(t) + \frac{a_k}{b_p} \cdot t^{k-p} \right)$$

un altro parziale quoziente

$$= \underbrace{f(t) - g(t) \cdot q(t)} - (b_p t^p + \dots) \cdot \frac{a_k}{b_p} \cdot t^{k-p}$$

$$= a_k t^k + \dots - a_k t^k + \dots \text{ ha grado } < k$$

ossia si può avere scelto k come $\min(A)$.

————— 0 —————

Fisso V sp. vett. su $\mathbb{R}$.

$W \subset V$ è sottosp. se è chiuso rispetto alle operazioni di V .

Prop.: se W e Z sono s.s.p. di V
allora anche $W \cap Z$ lo è.

Dimo.: 1. $0 \in W, 0 \in Z \Rightarrow 0 \in W \cap Z$.

2+3. Sia $v_1, v_2 \in W \cap Z, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;

$$\left. \begin{array}{l} v_1, v_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W \\ v_1, v_2 \in Z \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in Z \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W \cap Z. \quad \square$$

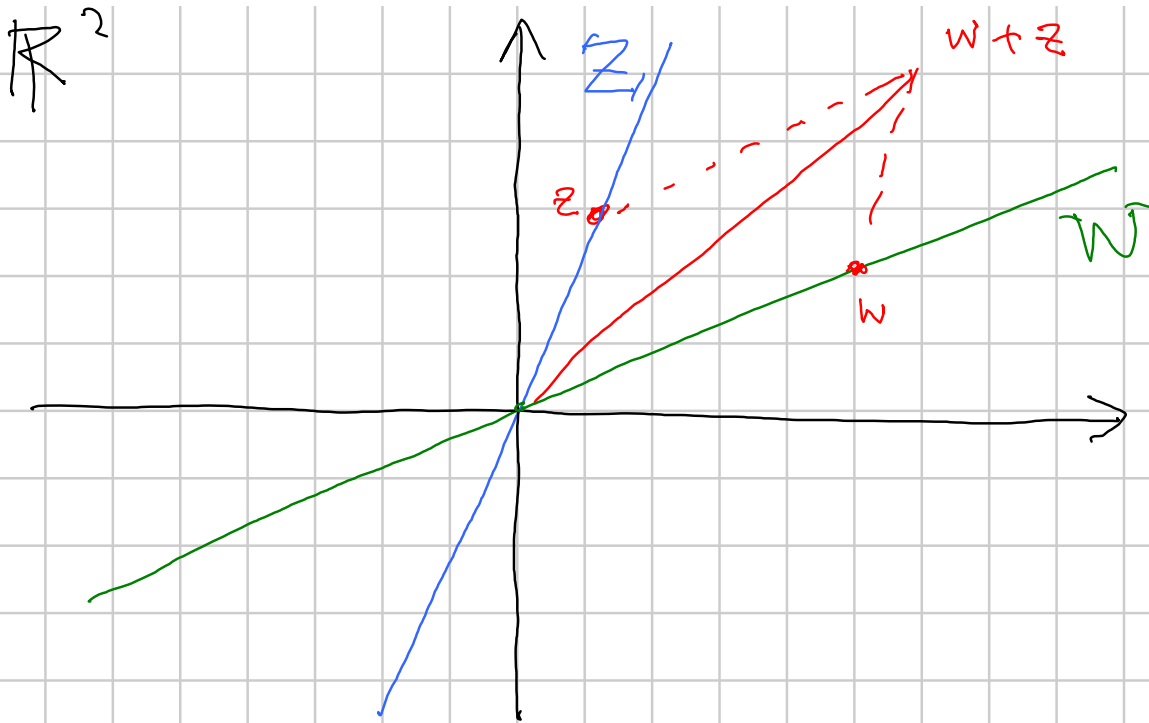
Prop: se W e Z sono stsp. di V allora
 $W \cup Z$ è stsp. $\iff W \subset Z$ o $Z \subset W$.

Dimo: $\Leftarrow$ ovvie: $W \cup Z$ è
 $W \cup Z$.

" $\subset$ " = contenuto
 o uguale

" $\subsetneq$ " = strettamente
 contenuto.

$\Rightarrow$ Se $W \not\subset Z$ esiste $w \in W \setminus Z$
 se $Z \not\subset W$ esiste $z \in Z \setminus W$.



Affermo che $w+z \notin W \cup Z$:

se per assurdo

- $w+z = w' \in W$
 $\Rightarrow z = w' - w \in W$

- $w+z = z' \in Z$
 $\Rightarrow w = z' - z \in Z$

Assurdo. $\square$

Da V ci sono sempre i sottospazi banali

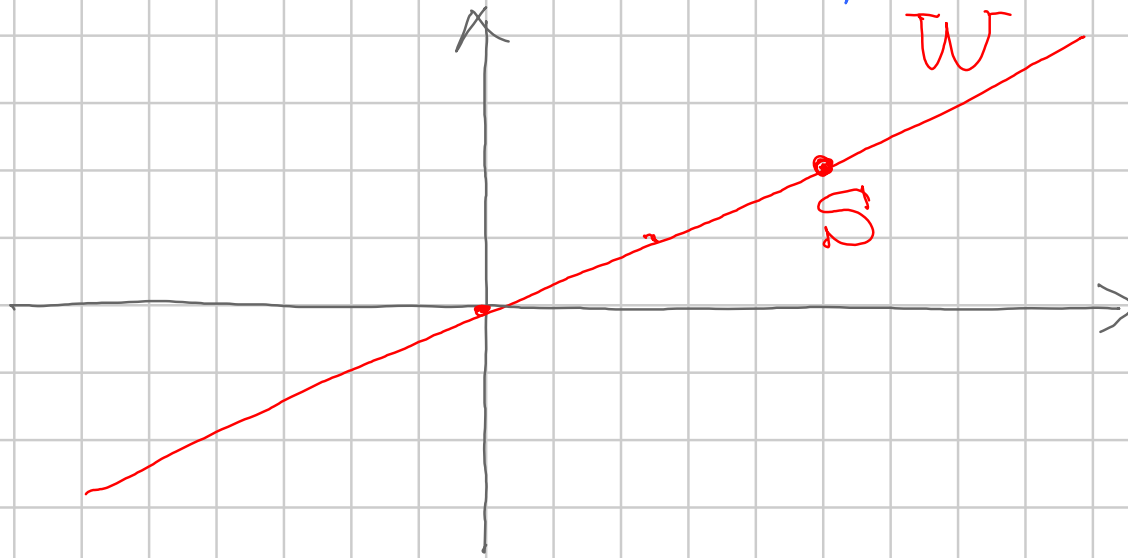
$$V, \{0\}$$

Teo: dato $S \subset V$ esiste un unico sottospazio W di V che è il più piccolo che contiene S , cioè

- $W \supset S$
- W è sottospazio

• se $Z \supset S$ e Z è sottosp. allora $Z \supset W$.

Es:



$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Dico: se ho W_1 e W_2 che "vanno bene":

- $W_1 \supset S$

- W_1 stsp.

- $\exists Z \supset S$ stsp, $Z \supset W_1$

$$\Downarrow$$

$$W_2 \supset W_1$$

- $W_2 \supset S$

- W_2 stsp

- $\exists Z \supset S$ stsp, $Z \supset W_2$

$$\Downarrow$$

$$W_1 \supset W_2$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2. \text{ Unique! ok.}$$

Oss: se ho una famiglia $W \neq \emptyset$ di sottosp. di V ,
l'intersezione di tutti

$$\bigcap_{W \in \mathcal{W}} W \quad \text{è sottosp.}$$

(come per 2 vinti
sopra)

Per noi prendo $W =$ l'insieme di tutti i
sottospazi che contengono S .

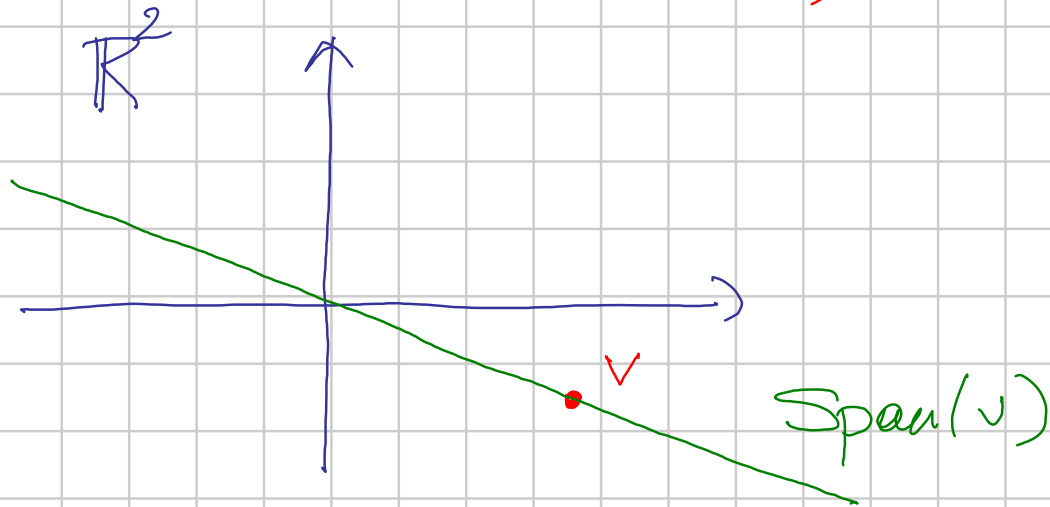
W contiene V dunque $W \neq \emptyset$. Dopo

$W = \bigcap W$ tale W è base (...). $\square$

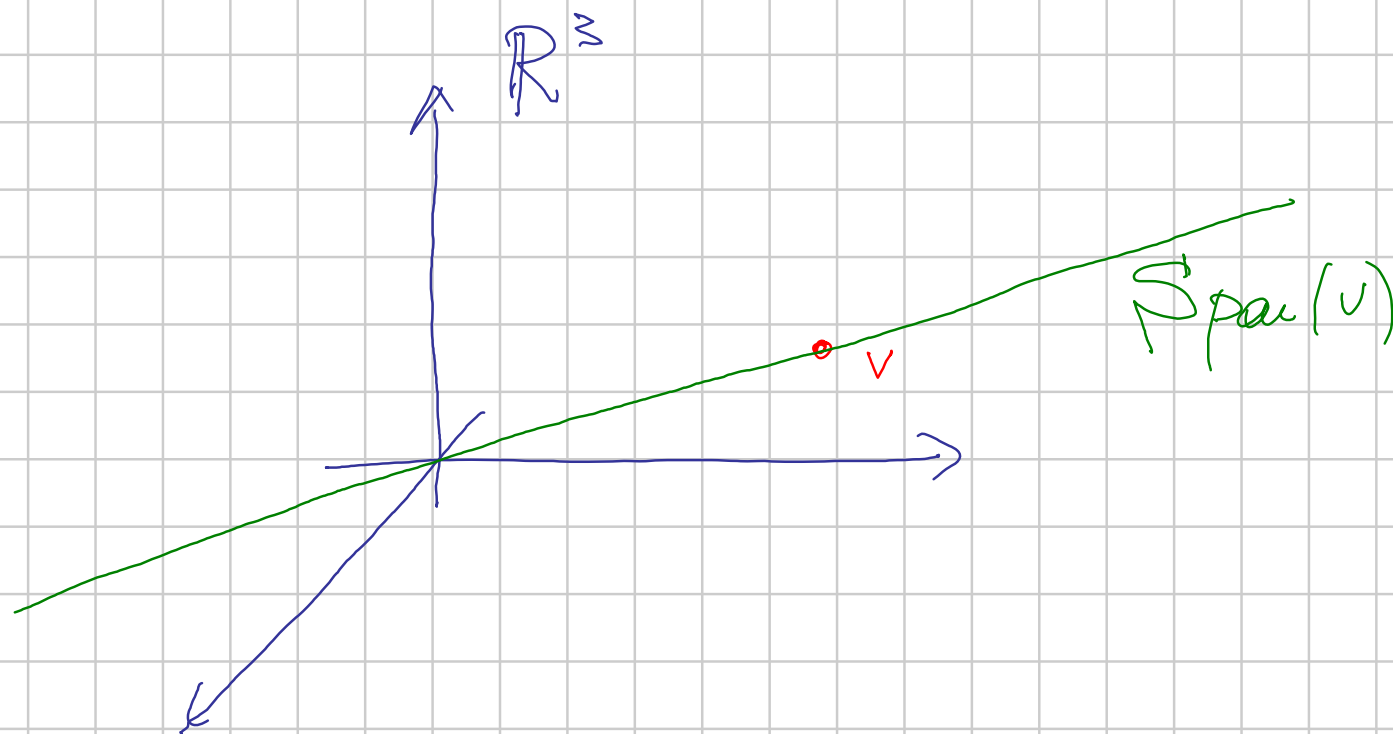
Def: dato $S \subset V$ chiamo sottospazio generato da S , e lo indico con $\text{Span}(S)$, il più piccolo sottosp. che contiene S .

Prop: $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
 $= \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}$
 comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$
 con coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

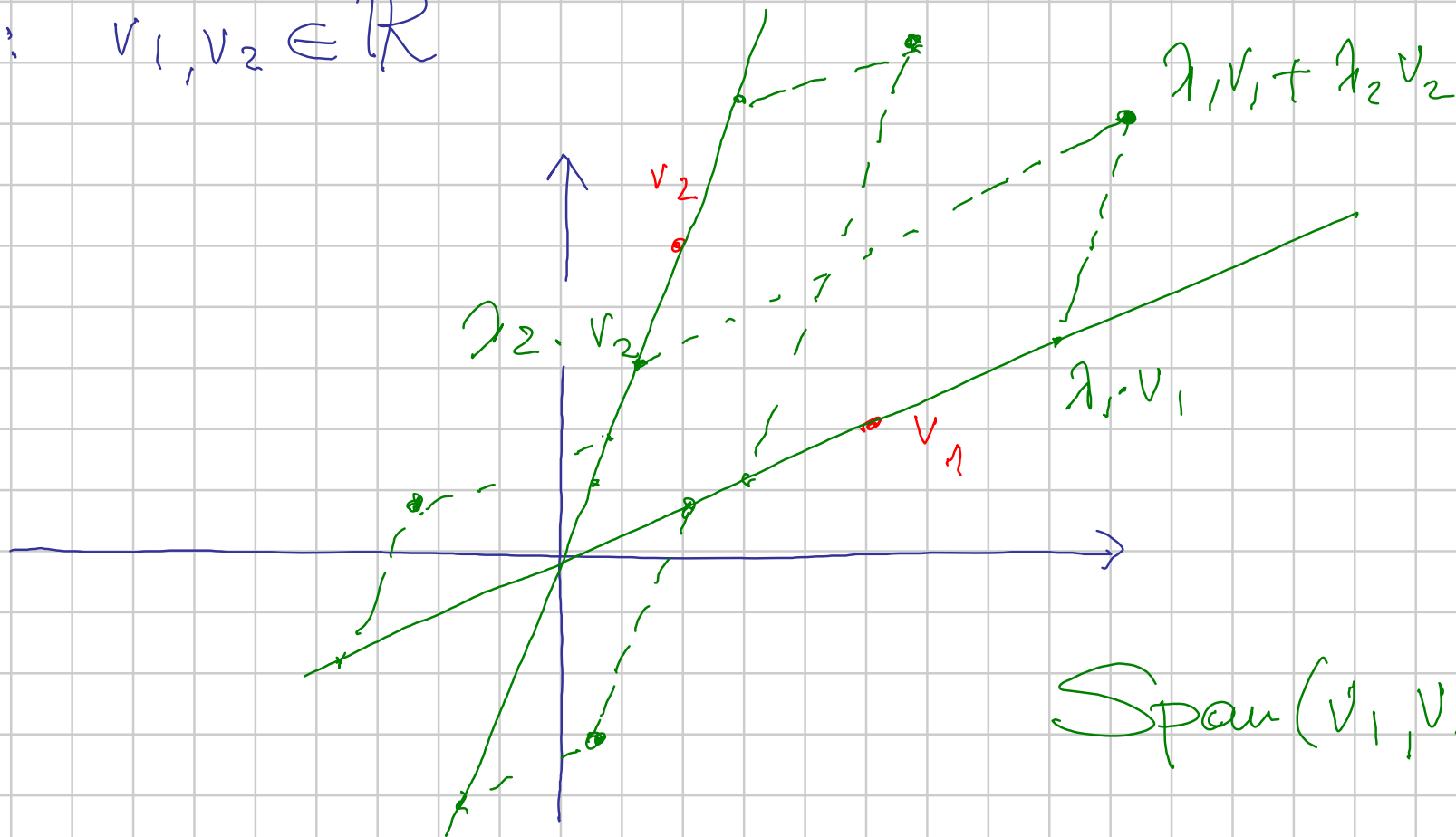
Es: $\text{Span}(v)$



L_5 : $\text{Span}(v)$

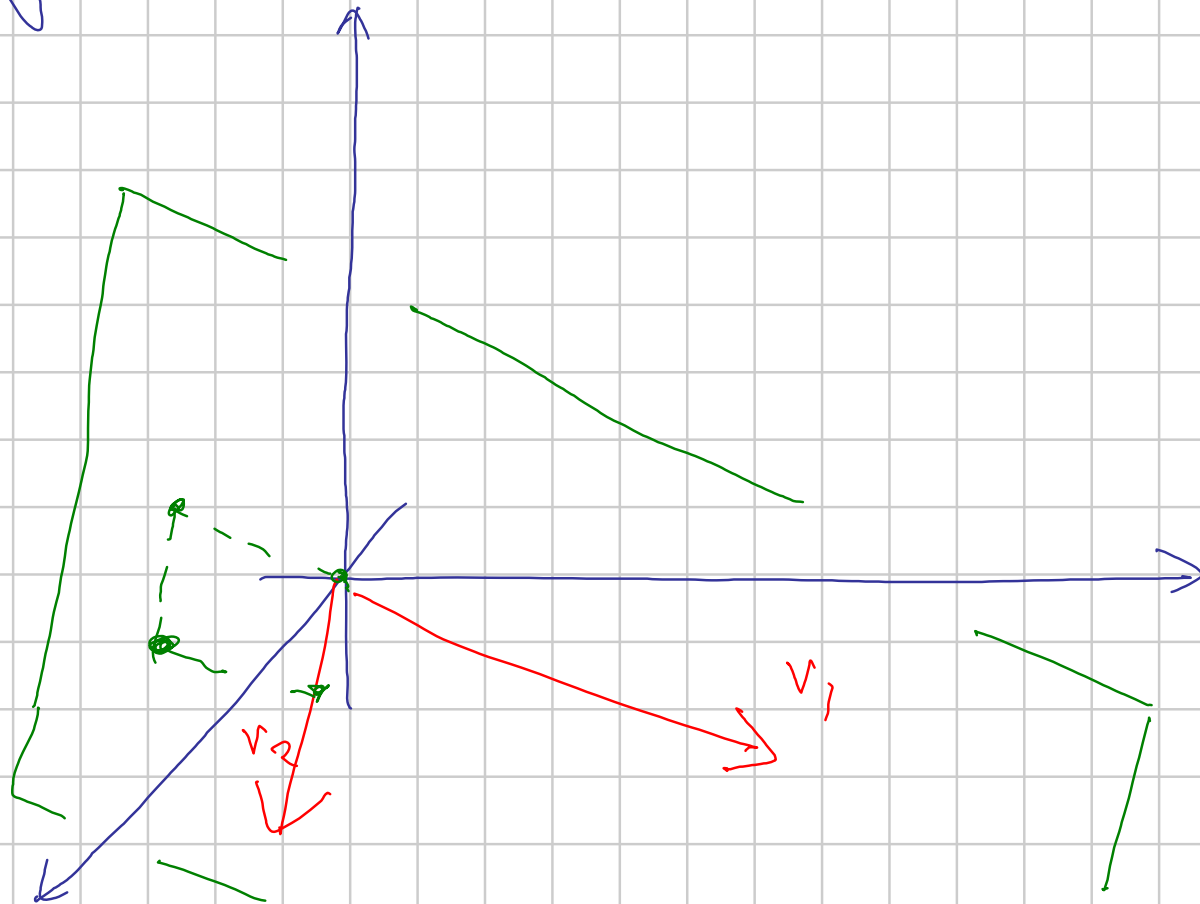


Ex: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

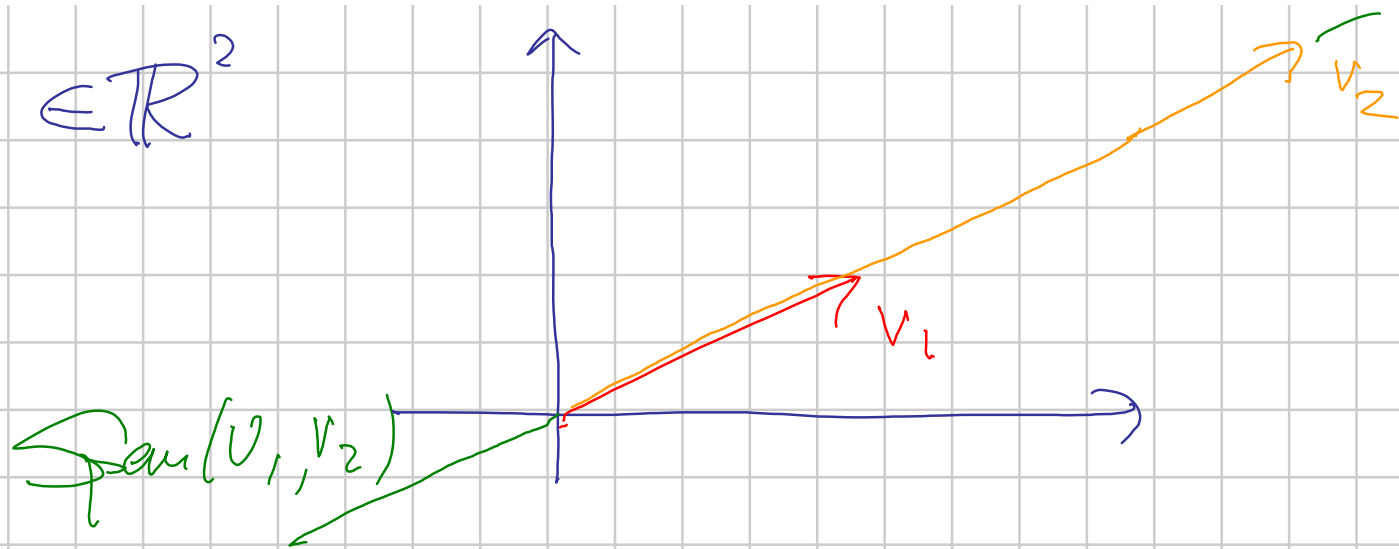


$$\text{Span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$$

Es: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$



Es: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$



Dimo: posto $W = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}$
devo vedere che:

- W contiene $v_1, \dots, v_k$

- W n.t.s.p

- se $Z \supset \{v_1, \dots, v_k\}$ n.t.s.p allora $Z \supset W$.

guelli:

- $v_j = \boxed{0} \cdot v_1 + \dots + \boxed{1} \cdot v_j + \dots + \boxed{0} \cdot v_k$

- $0 = \boxed{0} \cdot v_1 + \dots + \boxed{0} \cdot v_j + \dots + \boxed{0} \cdot v_k$

Siano $z = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in W$

$u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k \in W$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

allora $\alpha z + \beta u = (\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1) v_1 + \dots + (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k) v_k$

$$\Rightarrow \alpha z + \beta u \in W$$

• Sia Z s.t.s.p., $Z \supset \{v_1, \dots, v_k\}$.

Devo vedere che $Z \supset W$, cioè che preso
 $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in W$ generico, si ha
 $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in Z$. *Gufothi*:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

$\downarrow$
 $\mathbb{Z}$

$\downarrow$
 $\mathbb{Z}$

$\implies$ lui sta in $\mathbb{Z}$. □

Vale anche per $\mathbb{S}$ infinito:

Def: $\text{Span}(\mathbb{S}) = \left\{ \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_m s_m : m \in \mathbb{N}, \right.$
 $\left. s_1, \dots, s_m \in \mathbb{S}, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right\}$

Q55: $\text{Span}(\emptyset) = \{0\}$

Q55: se W è sottospazio, $\text{Span}(W) = W$.

————— 0 —————

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

Q: per un elemento di $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ la

Ma espressioni come comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$
è unica o no?

Es: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2.$$

Dato il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ esso si
esprime come comb. lin di $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix},$



ciò è anche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ b.c.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta \\ 3\alpha + 7\beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ 3\alpha + 7\beta = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{5}(1 - 2\alpha) \\ 3\alpha + \frac{7}{5}(1 - 2\alpha) = 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 15\alpha + 7 - 14\alpha = 20 \\ \beta = \frac{1}{5}(1 - 2\alpha) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = 13 \\ \beta = -5 \end{cases}$$

Trovato: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ha l'unica espressione

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_v: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{v_1} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}_{v_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{v_3}$$

Cerco le espressioni di $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ come $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$
cioè cerco $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 - 1 \cdot \alpha_3 = 1 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

la soluzione non è unica; ad es:

$$\alpha_1 = 13 \quad \alpha_2 = -5 \quad \alpha_3 = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q': Il vettore nullo ha una sola espressione?

(Fatto: stessa risposta -)

Def: $v_1, \dots, v_k$ si dicono linearmente indipendenti se l'unica espressione di 0 come $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ è quella con $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Cioè, sono lin. indip. se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

($\Leftarrow$ ovvia.)

Es: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ sono lin. indep.?

Esistono costanti α, β non entrambe nulle
t.c. $\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} = 0$? [Se tali α, β
esistono, sono dipendenti; se no indipendenti.]

$$\text{Il sistema } \begin{cases} 3\alpha - 5\beta = 0 \\ 4\alpha + 11\beta = 0 \end{cases}$$

ha solo la
soluz. $\alpha = \beta = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3/5 \alpha \\ 4\alpha + \frac{33}{5}\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{5} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{2}{5} \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

So soluz. $\alpha = \beta = 0$ e' unica $\Rightarrow$ soco lin. indep.

Es: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

sono lin. indep. e l'unica soluz. di

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \\ -\alpha + 7\beta + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\text{e } \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 7\beta + 6\gamma \\ 21\beta + 18\gamma + 2\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 7\beta + 6\gamma \end{cases}$$

The soln. ad is. $(\alpha = \beta = \gamma = 0)$

$$\beta = 1, \gamma = -1, \alpha = 1$$

$\Rightarrow$ i $\exists$ vekt. liniz. Also lin. dependent.

Prop: $v_1, \dots, v_k$ sono
lin. indep



ogni vett. di $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
ha esp. unica come
comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$

Dimo: $\Leftarrow$ ovvio.

$\Rightarrow$ Sia $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$, e

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k)v_k$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_k - \mu_k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_k = \mu_k.$$



Def: chiamo base di V un insieme
finito e ordinato $v_1, \dots, v_n$ di vettori
linearmente indipendenti e che generano V

$$(\Leftrightarrow \text{Span}(v_1, \dots, v_k) = V)$$

esistono

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sono entrambe
basi di $\mathbb{R}^2$ ma
diverse

Oss: se $v_1, \dots, v_n$ è base di V
allora ogni elemento $v \in V$ ha
una e una sola espressione come

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$v_1, \dots, v_n$
generano

$v_1, \dots, v_n$
lin. indep.