

Algebra lineare 3/10/18

Def: V spazio vett. se insieme dotato di $+$,

$$+ : V \times V \rightarrow V \\ (v, w) \mapsto v + w$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

1. $\exists 0 \in V$ t.c. $v + 0 = v \quad \forall v$

2. $\forall v \exists -v$ t.c. $v + (-v) = 0$

3. $v + (w + z) = (z + w) + v \quad \forall v, w, z$

4. $v + w = w + v \quad \forall v, w$

$(V, +, 0)$
gruppo commut

$$5. (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$$

$$6. \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

$$7. (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$$

$$8. 1 \cdot v = v$$

Quella reale:
 $(V, +, 0, \cdot)$

Conseguenze della def.:

- le espressioni $\lambda_1 \dots \lambda_k \cdot v, \quad v_1 + \dots + v_k$
 si possono scrivere senza parentesi

$$v + w = v + z \Rightarrow w = z$$

Gesamt: $v + w = v + z \Rightarrow (v + w) + (-v) = (v + z) + (-v)$

$$\Rightarrow (4) \quad v + (w + (-v)) = v + (z + (-v))$$

$$\Rightarrow (3)(3) \quad v + ((-v) + w) = v + ((-v) + z)$$

$$\Rightarrow (4) \quad (v + (-v)) + w = (v + (-v)) + z$$

$$\Rightarrow (2) \quad 0 + w = 0 + z$$

$$\Rightarrow (1) \quad w = z$$

$$\cdot \quad 0 \cdot v = 0 \quad \forall v$$

$\nearrow$
numero
 $\nwarrow$
vettore

giustezza: $0 \cdot v = (0+0) \cdot v$

$$\Rightarrow (5) \quad 0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

$$\Rightarrow (1) \quad \cancel{0 \cdot v} + 0 = \cancel{0 \cdot v} + 0 \cdot v$$

Ese: $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda$

$$\cdot \quad (-1) \cdot v = -v \quad \text{infatti:}$$

$$\underset{(1)}{-V} = -v + \underset{\text{(sp. vett)}}{0} = -v + 0 \cdot v = -v + (1-1) \cdot v$$

$$\underset{(5)}{=} -v + \cancel{(1 \cdot v + (-1) \cdot v)} \underset{(8)}{=} -v + v + (-1) \cdot v$$

$$\underset{(2)}{=} \underset{(1)}{0 + (-1) \cdot v} = (-1) \cdot v$$

————— 0 —————

Fisso V sp. vett. Dico che $W \subset V$ è
 sottospazio vettoriale se

1. $0 \in W$

2. $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

3. $w \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$

Oss: •) W eredita una struttura di spazio vettoriale

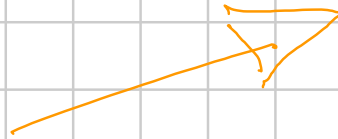
• Posso indebolire la 1 dicendo solo $W \neq \emptyset$

($W \ni w \xRightarrow{(\Rightarrow)} 0 \cdot w = 0 \in W$)

• Posso combinare 2 e 3 in

$w_1, w_2 \in W, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2} \in W$

intesa sia come
scrittura sia
come valore del risultato

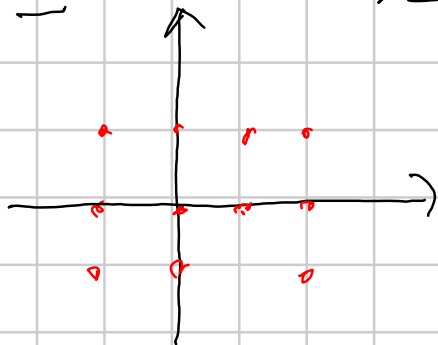


combinazione lineare
dei vettori w_1 e w_2
con coefficienti λ_1, λ_2

$$(5 + 8)$$

Esempio: $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^3$

$m=2$



1. $\checkmark$ $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^m$

2. $\checkmark$

3. No:

$\frac{1}{2}W = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^m$

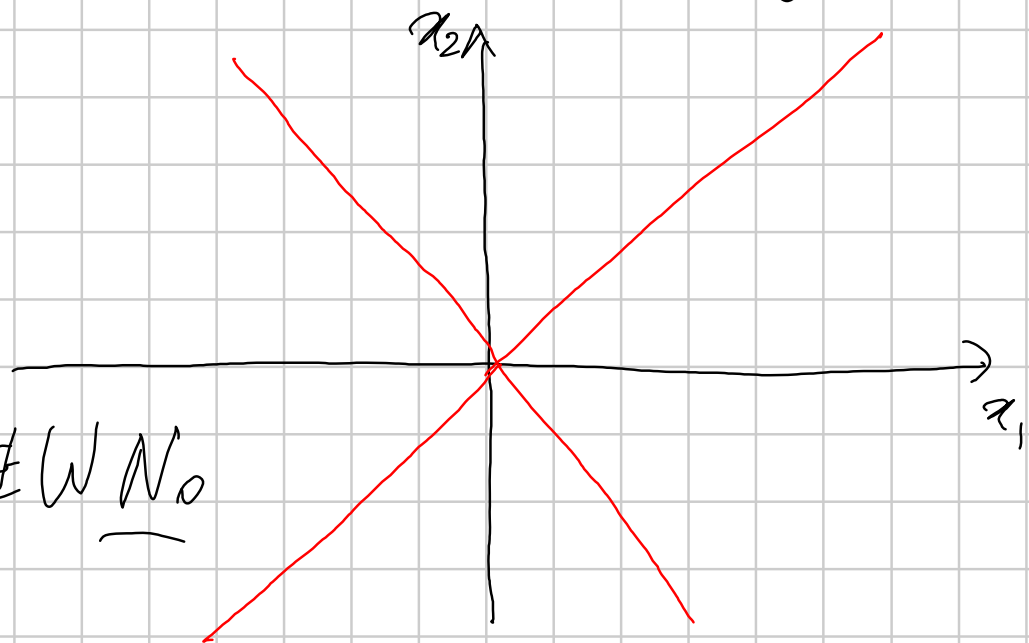
$\cdot \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2^2 \right\}$

1. $\checkmark$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$

ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W$ No

3. $\checkmark$



$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}$$

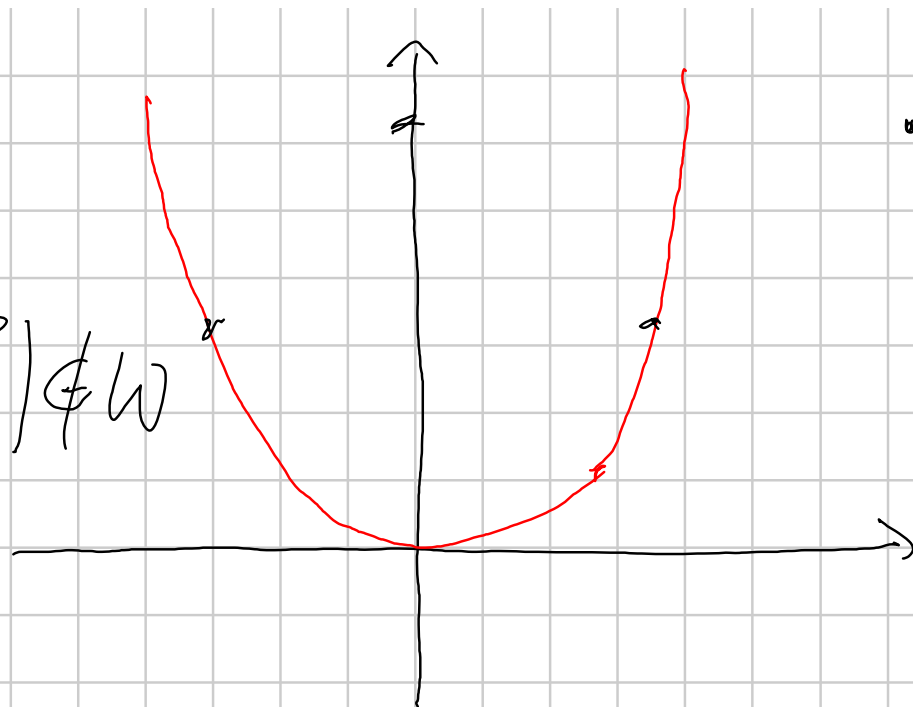
1. ✓

$$2. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

No

$$3. 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 W



Oss: se $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ allora

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0}_{\text{pol. omog. di 1° grado in } x_1, \dots, x_m} \right\}$$

è sottosp. vett.

equazione lineare.

Esempio:

$$1. \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$2. \quad \text{Se } \alpha, y \in W, \text{ cioè } \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

$$\alpha_1 (x_1 + y_1) + \dots + \alpha_n (x_n + y_n) = 0$$

$$\Rightarrow x + y \in W$$

3. Se $x \in W$, cioè $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$,
 $\lambda \in \mathbb{R}$ ho $\lambda(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \lambda \cdot 0$
 $\Rightarrow \alpha_1 (\lambda x_1) + \dots + \alpha_n (\lambda x_n) = 0$
 $\lambda x \in W$. □

Obs: con più di una eq. è uguale
 $\Rightarrow$ una o più equazioni lineari nelle
 componenti definiscono sempre un sottospazio

In realtà: "solo loro" me ottusione:

$$\underline{L_5} : \{x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{7x_1 - \sqrt{3}x_2}_{\text{eq. non lineare}} = 1\}$$

però equivale a $\underbrace{7x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0}_{\text{lineare}}$

Esempi di sottospazi di $\mathbb{R}[t]$:

• $\mathbb{R}_{\leq d}[t] = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) \leq d\}$

1. ✓

2. ✓

3. ✓

$(\{p(t) : \deg(p(t)) = d\} \cup \{0\})$

non soddisfa 2 $\Rightarrow$ non è sottosp.

Derivato di un polinomio:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n ; \quad p'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

$$\bullet \quad \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \underbrace{3p(2) - 7p'(-3)} = 0 \}$$

$$x \quad p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots$$

equazione : $3(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + \dots) - 7(a_1 + 6a_2 + 27a_3 + 108a_4 + \dots) = 0$

$$\underline{3a_0 - a_1 + 54a_2 + (3 \cdot 4 - 7 \cdot 27)a_3 + (\dots)a_4 = 0}$$

equazione lineare nei coefficienti
del polinomio

Oss: poiché le operz. tra polinomi si
esprimono coefficiente per coefficiente, lo
stesso argomento di $\mathbb{R}^n$ dice che una
o più equaz. lineari nei coefficienti definiscono
una sottosp. di $\mathbb{R}[t]$.

In realtà: vanno bene solo loro (o "monomiali")

$$\mathcal{L}_S: W = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \underbrace{6p(t) - t^2 p''(t)} = 0 \}$$

$$\text{pa } p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

$$\text{ho } p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots$$

$$p''(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{eq: } 6a_0 + 6a_1 t + 6a_2 t^2 + 6a_3 t^3 + 6a_4 t^4 + 6a_5 t^5 + \dots \\ - 2a_2 t^2 - 6a_3 t^3 - 12a_4 t^4 - 20a_5 t^5 + \dots = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6a_0 + 6a_1t + 4a_2t^2 - 66a_4t^4 - 114a_5t^5 + \dots = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a_0 = 0 \\ 6a_1 = 0 \\ 4a_2 = 0 \\ -6a_4 = 0 \\ -114a_5 = 0 \\ \vdots \\ \underbrace{(6 - n(n-1))}_{\neq 0 \text{ for } n \neq 3} a_n = 0 \quad \forall n \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \quad \forall n \neq 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow W = \{ \alpha \cdot t^3 : \alpha \in \mathbb{R} \}$ ist ein Unterraum.

2.3.8

$$\sum_{j=0}^m j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

($m=5$: $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ 1+4+9+16+25 = 55)

$$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 55$$

Oss: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ è sempre intero perché

possiamo verificare che $n(n+1)(2n+1)$ è

sempre multiplo di 2 : facile n o $n+1$ pari
e multiplo di 3 : resto di $n:3$ è 0, 1, 2

se 0 : n mult. di 3

se 1 : $n = 3k+1 \Rightarrow 2n+1 = 6k+3$
mult. di 3

se 2 : $n+1$ mult. di 3

Per induzione $P(n) : \sum_{j=0}^n j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Passo base : $P(0) : 0^2 = \frac{1}{6} 0(0+1)(2 \cdot 0+1)$
OK

Passo induttivo : Suppongo vera $P(n)$ e

mostro che diventa $P(n+1)$:

$$\sum_{j=0}^{n+1} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6} (2n^2 + n + 6(n+1))$$

$$= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6)$$

Per verificare la tesi induttiva devo vedere che
 questo valore coincide con:

$$\frac{1}{6} (n+1) ((n+1)+1) (2(n+1)+1)$$

$$= \frac{1}{6} (n+1) (n+2) (2n+3) = \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + 7n + 6)$$

OK

Principio di induzione completo:

Per verificare che un predicato $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$ è sufficiente:

(I) verificare che $P(0)$ è vera

(II) supponendo vere $P(0), P(1), \dots, P(n)$
dimostrare che vale $P(n+1)$

Perditi basta?

- $P(0)$ vera (passo base I)

- applico II con $n=0$: $P(0) \Rightarrow P(1)$

però ho visto che $P(0)$ è vera dunque
anche $P(1)$

- applico II con $n=1$: $P(0), P(1) \Rightarrow P(2)$

però ho visto che $P(0), P(1)$ sono vere,
dunque anche $P(2)$...

Def: $k \in \mathbb{Z}^{\neq 0}$ è primo se ha come unici
divisori $\pm 1, \pm k$.

Oss: k non è primo (è composto) se

$$k = a \cdot b \quad \text{con} \quad 1 < |a| < |k|$$

2.3.11

Dimostrare che ogni intero $n > 1$
è prodotto di numeri primi.

Per induzione: $P(n)$ è prodotto di primi $\forall n \geq 2$

PB: $P(2)$: 2 è prod. di primi $\checkmark$

PI: suppongo $P(n)$, cioè che n sia
prodotto di primi

due casi: $\rightarrow n+1$ primo $\checkmark$

$\rightarrow n+1$ composto, $n+1 = a \cdot b$
 $1 < a, b < n$

Con induzione completa:

ipotesi induttive: $P(2), P(3), \dots, P(n)$

dice "tutti gli interi fino a n
sono prodotto di primi"

Sopra trova che a, b sono prodotto di primi

$\Rightarrow$ anche m .

$2 \cdot 3 \cdot 12$

Esistono infiniti numeri primi.

Per assurdo: suppongo che esista una lista di tutti i numeri primi sia finita:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \dots, p_k.$$

Prendo il numero $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$.

So che N è prodotto di primi, ma i
primi sono $p_1, \dots, p_k$ dunque esiste

un p_j t.c. N è multiplo di p_j ;

tuttavia la divisione $N : p_j$ ha resto 1

$$N = p_j \cdot (p_1 \dots \cancel{p_j} \dots p_k) + 1$$

$\Rightarrow N$ non è multiplo di p_j . Assurdo.