

Algebra lineare 6/11/18

$f: V \rightarrow W$ lineare

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ di W

$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$: quella la cui i -esima colonna
contiene le coord rispetto a base $\mathcal{C}$

arrivo dello i -esimo vettore della
base in partenza.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A \quad \text{se} \quad f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j.$$

Esempio: $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$$f: X \rightarrow X \quad \text{data da} \quad f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ -2x_1 - 3x_2 - 8x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

Verifico che f è ben def. e lineare.

ATT: $f(x) = A \cdot x$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ -2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$

però f non è l'applicazione lineare associata
a A , poiché $A \in M_{3 \times 3}$, quindi $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Oss (1) se ho $g: V \rightarrow W$ lineare e $U \subset V$
sosp. vett allora la restrizione di g

o U , cioè $g|_U : U \rightarrow W$ data da
 $g|_U(u) = g(u) \quad \forall u \in U$ è lineare.

(2) se ho $g : V \rightarrow W$ lineare e $Z \subset W$
sottosp. vett. t.c. $g(V) \subset Z$ allora la
abbreviazione di g a Z , cioè $g|_Z : V \rightarrow Z$
data $g|_Z(v) = g(v) \quad \forall v \in V$ è lineare.

(3) se $g : V \rightarrow W$ è lineare, $U \subset V$ e $Z \subset W$

$\Rightarrow$ sp. vett. tr. $g(U) \subset \mathbb{Z}$ more

$$g|_{\overline{U}} : U \rightarrow \mathbb{Z} \quad g|_{\overline{U}}(u) = g(u) \quad \forall u \in U$$

$\overline{g}$ linear.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ -2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f_A(x) = A \cdot x$$

de formula $f(x) = A \cdot x$ definisce $f : X \rightarrow X$

se ho che $f_A(X) \subset X$ - Mostro questo
la linearità è ovvia -

Verifichiamo: dato $x \in X$, cioè $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
devo vedere che $f_A(x) \in X$ cioè

$$(5x_1 + x_2 + 3x_3) + (-x_1 + 4x_2 + 7x_3) + (-2x_1 - 3x_2 - 8x_3) = 0$$

cioè $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ Vero.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ -2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Cerco $[f]_B^B$:

$$f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} = +7 \cdot \frac{22}{39} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \frac{22}{39} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 41 \\ -39 \end{pmatrix} = * \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{193}{39} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 \cdot \frac{22}{39} & * \\ -\frac{22}{39} & -\frac{193}{39} \end{pmatrix}.$$

Prop: date basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ di V e $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ di W la applicazione:

$\mathcal{L}(V, W) \ni f \longmapsto [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$
è lineare biettivo.

Cioè: fissate basi in partenza e in arrivo le
appl. lin. da V in W sono identificate
alle matrici $m \times m$.

Visto: $M_{m \times m}(\mathbb{R}) \ni A \longmapsto f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

φ lineare biettiva — Cioè: le appl. lin. da
 $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ "sono" le matrici $m \times n$.

Un risultato si tratta delle stesse corrispondenze
se fissi su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ le basi canoniche.

Quindi $[f_A]_{\sum^{(m)}}^{\sum^{(n)}} = A$; infatti:

$$f_A(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \Rightarrow [f_A]_{\sum^{(m)}}^{\sum^{(n)}} = A.$$

Dimo: devo vedere che $f \mapsto [f]_{\mathcal{B}}$ è lineare.

cioè che $[kf + hg]_{\mathcal{B}} = k \cdot [f]_{\mathcal{B}} + h \cdot [g]_{\mathcal{B}}$

$\parallel$ $\parallel$
 $\times$ γ

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^m x_{ji} w_j$$

$$g(v_i) = \sum_{j=1}^m y_{ji} w_j$$

$$k f(v_i) + h g(v_i) = \sum_{j=1}^m (k x_{ji} + h y_{ji}) w_j$$

$$(k \cdot f + h \cdot g)(v_i)$$

Devo ora vedere che

$f \mapsto [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è iniettiva, cioè che ha $\text{Ker} = \{0\}$.

Se $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = 0 \in M_{m \times n}$ ho

$$f(v_i) = 0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_m = 0 \quad \forall i$$

se $v \in V$ ho $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ dunque

$$(k \cdot X + h \cdot Y)_{j,i}$$

OK

$$f(v) = \alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_0 + \dots + \alpha_n \underbrace{f(v_n)}_0 \Rightarrow f(v) = 0.$$

OK

Suppletività : pospongo -

Prop: se fisso $v_1, \dots, v_m$ basi di V
 per qualsiasi scelte di $w_1, \dots, w_m \in W$
 esiste una e una sola $f: V \rightarrow W$ t.c.

$$f(v_i) = u_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Cioè: una appl. lin. è determinata univocamente dai suoi valori su una base, e tali valori si possono scegliere a piacere.

Dimo: f , se esiste, è unica: supponiamo di avere $f, g: V \rightarrow W$ lin. t.c. $f(v_i) = g(v_i) = u_i$.

Preso $v \in V$ ho che $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$g(v) = \alpha_1 g(v_1) + \dots + \alpha_n g(v_n) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$\Rightarrow f(v) = g(v)$$

$$\Rightarrow f = g.$$

Mostriamo che esiste : per qualsiasi $v \in V$

Scrivo $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ e posso $f(v) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

Resta da vedere che tale f è lineare, cioè

$$f(kv + hz) = k f(v) + h f(z)$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow f(v) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$z = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow f(z) = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$$

$$kv + hz = (k\alpha_1 + h\beta_1)v_1 + \dots$$

$$\Rightarrow f(kv + hz) = (k\alpha_1 + h\beta_1) \cdot u_1 + \dots$$

inoltre

$$k f(v) + h f(z) = (k \alpha_1 + h \beta_1) u_1 + \dots$$

$\square$

Concludo la dimostrazione che $f \mapsto [f]_{\mathcal{B}}$
è surgettiva.

Dato $A \in M_{m \times n}$ la prop. precedente dice
che esiste (ed è unico) $f: V \rightarrow W$ lin. t.c.
 $f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j$.

Per tale f ho $[f]_B^B = A$.



Cor: $\dim(V) = m, \dim(W) = n$
 $\Rightarrow \dim(\mathcal{L}(V, W)) = m \cdot n$

Oss: Se X, Y sono sp. vett. allora $X \times Y$
 è sp. vett. con $\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2)$
 $= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

(Come costruire $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a partire dalle
operaz. di $\mathbb{R}$)

$$\text{Quindi } \dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$$

(Se $x_1, \dots, x_k$ è base di X
 $y_1, \dots, y_h$ è base di Y

allora $(x_1, 0), \dots, (x_k, 0), (0, y_1), \dots, (0, y_h)$
è base di $X \times Y$)

Congruenza: se W è sp. vett. di dim n
 allora $W^m = \underbrace{W \times \dots \times W}_m$ è sp. vett.
 di dim $m \cdot n = n$

Prop: fissate base $v_1, \dots, v_n$ di V la

$$\begin{array}{ccc}
 W^m & \longrightarrow & \mathcal{L}(V, W) \\
 (u_1, \dots, u_m) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{unica } f: V \rightarrow W \text{ lin. l.c.} \\ f(v_i) = u_i \quad i=1, \dots, m \end{array} \right.
 \end{array}$$

è lineare bigettiva -

(Bigettiva : visto ; lineare : esercizio -)

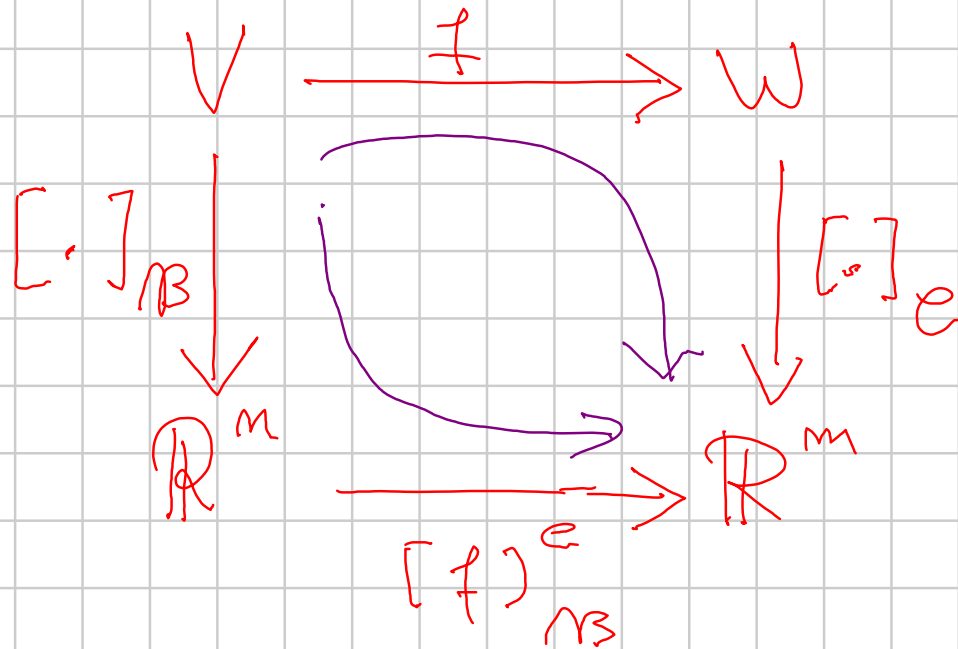
Con : $\dim(V) = m$, $\dim(W) = m$

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{L}(V, W)) = m \cdot m -$$

Prop: Se $f: V \rightarrow W$ è lin. e ho basi B, C
allora $[f(v)]_C = [f]_{CB} \cdot [v]_B$.

Usando le basi per identificare i vettori
ai vettori colonne e le appl. lin. alle matrici,
ho che l'azione di un'applicazione sui vettori
coincide con l'azione della sua matrice sulle
coordinate (USANDO STESSA BASI).

Oppure:



Definizione: chiameremo $x = [v]_B$, $A = [f]_B^C$;
cioè $v = \sum_{i=1}^m x_i v_i$ $f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j$ —

$$\begin{aligned}
 f(v) &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i}_{(A \cdot x)_j} \right) \cdot w_j
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [f(v)]_c = A \cdot x.$$



Prop: date $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ lin
 e basi $\mathcal{B}$ $\mathcal{C}$ $\mathcal{D}$
 ho $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Cioè: la composiz. di appl. lin. corrisponde
 al prodotto righe $\times$ colonne delle matrici associate

SE USO LE STESSHE BASI

Dico: chiamo $X = [x]_n^m$ $Y = [y]_m^d$ cioè:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^m x_{ji} w_j$$

$$g(w_j) = \sum_{l=1}^p y_{lj} z_l$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v_i) &= g(f(v_i)) = g\left(\sum_{j=1}^m x_{ji} w_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m x_{ji} g(w_j) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^m x_{ji} \sum_{l=1}^p y_{lj} z_l$$

$$= \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j=1}^m y_{lj} \cdot x_{ji} \right) \cdot z_l$$

$$(Y \cdot X)_{li}$$

$$\rightarrow [g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = Y \cdot X.$$



Q: come cambia $[v]_{\mathcal{B}}$ se cambia $\mathcal{B}$?

Q: come cambia $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ se cambia $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$?

X, Y insiemi, $f: X \rightarrow Y$ è invertibile
se $\exists g: Y \rightarrow X$ t.c.
 $g \circ f = \text{id}_X$ $f \circ g = \text{id}_Y$

$$(g(f(x)) = x \quad \forall x \in X) \quad (f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y)$$

Fatti: 1) tale g se esiste è unica e
 la chiamo f^{-1} inversa di f
 2) f è invertibile se e solo se è biettiva

Oss: se ho $f: X \rightarrow Y$
 $g: Y \rightarrow X$

$$g \circ f = id_X$$

NON posso concludere che g e f sono
invertibili e che sono inverse tra loro.

Es: $X = Y = \mathbb{N}$

$$f(n) = n + 1$$

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n-1 & \text{se } n>0. \end{cases}$$

Allora $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ - "Puo"

f non è sur.
 $0 \notin \text{Im}(f)$

g non è iniettiva
 $g(148) = 10 = 147$

Pero: Sapendo che $g \circ f = \text{id}_X$ ho:

- f iniettiva

- g surgettiva

- Se so che una delle due è invertibile
allora sono inverse le loro.

- f injective: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
 $\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$
 $\quad \quad \quad x_1 \quad \quad \quad x_2$

- g surjective: $\forall x \in X$ ho $g(f(x)) = x \Rightarrow x \in \text{Im}(g)$

- se $\exists f^{-1}$ $g \circ f = \text{id}_X \Rightarrow g \circ f \circ f^{-1} = \text{id}_X \circ f^{-1}$
 $\Rightarrow g \circ \text{id}_X = \text{id}_X \circ f^{-1}$
 $\Rightarrow g = f^{-1}$

se $\exists g^{-1}$

Gia' visto: se $\dim(V) = m$, $\dim(W) = m$

$f: V \rightarrow W$ lin. iniettiva $\Rightarrow m \leq m$

$g: W \rightarrow V$ lin. surgettiva $\Rightarrow m \leq m$

quindi una $f: V \rightarrow W$ lin. può essere
invertibile solo se $m = m$. In tal

caso ho f iniettiva $\Leftrightarrow f$ surgettiva.

Dunque $\exists f \text{ t.c. } g \circ f = \text{id}_V \iff \exists g \text{ t.c. } f \circ g = \text{id}_W$

Dico che $A \in M_{m \times m}$ è invertibile
se lo è come appl. lin. cioè se
 $\exists B \in M_{m \times m} \text{ t.c.}$

$$A \cdot B = I_m \quad B \cdot A = I_m$$

Cio può accadere solo se

$$A \in M_{m \times m} \quad (\text{quadrato})$$

e in tal caso basta sapere che

$$B \cdot A = I_m \quad \text{oppure} \quad A \cdot B = I_m$$

per concludere che A è invertibile e $B = A^{-1}$.