

Algebra lineare 5/12/18

$\mathbb{C}$ campo.

Def: V insieme $\bar{e}$ sp. vett. su $\mathbb{C}$ se esistono

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

con le stesse $\&$ proprietà del caso reale

1-4 con $+$ $\bar{e}$ gruppo comm

5-6-7 associative e distributiva

8

$$1 \cdot v = v$$

Tutta la teoria è ripetuta identica al caso su $\mathbb{R}$ purché $\mathbb{F}$ abbia un'unità 1 che è un campo.

Def: Se V, W sono sp. vett. su $\mathbb{F}$
 $f: V \rightarrow W$ è lineare se

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

Prop. $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \xleftarrow{\quad} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$

$f_A \xleftarrow{\quad} A$

where $f_A(z) = A \cdot z$ is a bijective linear.

$$\underline{\text{Es}}: A = \begin{pmatrix} 2+i & i\sqrt{3} \\ 7+2i & -\sqrt{2}+i \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

represents $f_A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ linear

$$f_A \cdot \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{2} \\ 6+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & i\sqrt{3} \\ 7+2i & -\sqrt{2}+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{2} \\ 6+i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2i\sqrt{2}+i-\sqrt{2}+6i\sqrt{3}-\sqrt{3} \\ 7+7i\sqrt{2}+2i-2\sqrt{2}-6\sqrt{2}+i\sqrt{2}+6i-1 \end{pmatrix} = \dots$$

Def: $v_1, \dots, v_m \in V$ sp. vett. su $\mathbb{C}$ sono
lin. indep. se gli unici $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$
t.c. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ sono $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Generano V se $\forall v \in V \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$
t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$. Sono base di V
su $\mathbb{C}$ se sono lin. indep. e generano.

Es: $\begin{pmatrix} 2+i \\ 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7+3i \\ -1+5i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$;

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$; sono il numero giusto

per essere base di $\mathbb{C}^2$; per vedere che lo sono
basta vedere che sono lin. indep.: dunque
basta vedere che

$$\det \begin{pmatrix} 2+i & 7+3i \\ 1-i & -1+5i \end{pmatrix} \neq 0;$$

in fatti vale $(2+i)(-1+5i) - (1-i)(7+3i)$

$$= -2 - 5 - 7 - 21 + 10i - i - 3i + 7i$$

$$= -35 + 13i \neq 0 \quad \underline{\text{ok}}$$

Le coordinate di $\begin{pmatrix} 2-i \\ 6+i \end{pmatrix}$ rispetto a

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7+3i \\ -1+5i \end{pmatrix} \right)$ sono $\left[\begin{pmatrix} 2-i \\ 6+i \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

t.c.

$$\begin{pmatrix} 2-i \\ 6+i \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7+3i \\ -1+5i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (2+i)\alpha + (7+3i)\beta = 2-i \\ (1-i)\alpha + (-1+5i)\beta = 6+i \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\det \begin{pmatrix} 2-i & 7+3i \\ 6+i & -1+5i \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2+i & 7+3i \\ 1-i & -1+5i \end{pmatrix}} = \dots$$

$$\beta = \frac{\det \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1-i & 6+i \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2+i & 7+3i \\ 1-i & -1+5i \end{pmatrix}} = \dots$$

Oss: uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è anche
uno sp. vett. su $\mathbb{R}$ con le stesse operaz. +
e prodotto per scalare lo stesso ma usando
solo numeri reali.

Es: $\mathbb{C}$ sp. vett. su $\mathbb{C}$ di $\dim = 1$;
come sp. vett. su $\mathbb{R}$ si identifica a $\mathbb{R}^2$
 $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

$$\underline{\text{Es:}} \quad \mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, \right\} = \mathbb{R}^{2n}$$

Come sp. vet. su $\mathbb{R}$ ho $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^m) = 2m$$

mentre $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m) = m$

Prop: Se V è sp. vett. su $\mathbb{C}$ e $\dim_{\mathbb{C}}(V) = m$
allora $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2m$.

Dim: esiste una base $v_1, \dots, v_m$ di V su $\mathbb{C}$
cioè ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, cioè

ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = (\alpha_1 + i\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)v_n \quad \text{con } \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$$

cioè ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = \alpha_1 v_1 + \beta_1 (iv_1) + \dots + \alpha_n v_n + \beta_n (iv_n)$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$

cioè $v_1, (iv_1), \dots, v_n, (iv_n)$ è una base di $V_{\mathbb{R}}$.

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}) = 2m.$$



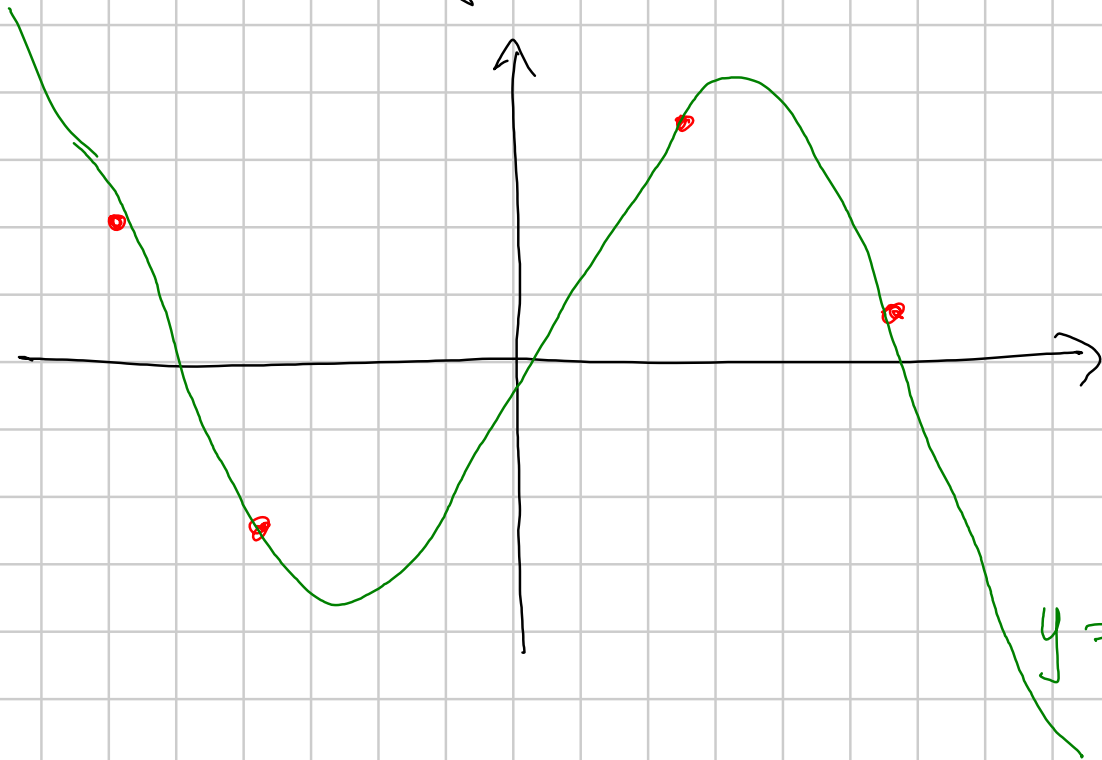
$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j - \lambda_i)$$

6.2.20

Interpolazione polinomiale:

dati m pti del piano con ascisse distinte

esiste un unico polinomio di grado $\leq n-1$
il cui grafico contiene gli n pts.



$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Supponi ho $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ e cerco

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \quad \text{t.c.} \quad p(x_j) = y_j$$

ovvero:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Sistema di n equez. nelle incognite $a_0, \dots, a_{n-1}$
con matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\det \nearrow = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{(x_j - x_i)}_{\neq 0}$$



$\neq 0 \Rightarrow$ soluz. unica -

6.3.1 Calcolare inversa:

$$(b) A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \quad \det = 10 - 24 = -14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -7 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = 13 - 28 = -15$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-15} \begin{pmatrix} -13 & 4 & -5 \\ -7 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 10 - 5 = -14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} 2 & -4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

6.3.4

Dire per $t \in \mathbb{R}$ quante soluz. ha

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - 2z = 1 \\ (1+t)x + 3y + z = t \\ 7x + 12y + 2tz = -1. \end{cases}$$

Soluz. unica e meno che non sia nullo

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & -2 \\ 1+t & 3 & 1 \\ 7 & 12 & 2t \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 1+t & 3 & 4 \\ 7 & 12 & 2t+12 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 1+t & 3 & 2 \\ 7 & 12 & t+6 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} -3t^2 - 15t + 18 \\ -2t^2 - 14t + 28 \\ +24t - 24 \end{pmatrix}$$

$$= -2 (5t^2 + 5t - 10) = -10 (t^2 + t - 2)$$

$$= -10 (t + 2)(t - 1)$$

Dunque per $t \neq -2$ e $t \neq 1$ soluz. unica -

$$\boxed{t = -2}:$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y + z = -2 \\ 7x + 12y - 4z = -1 \end{cases}$$

I e II equaz. lin. indep.

Per forza la parte overpende della III è comb. lin.

delle parti superiori di I e II :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 7 \\ -2\alpha + \beta = -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{matrix}$$

$$-1 \quad \begin{matrix} 7 \\ 0 \end{matrix} \quad 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \quad \underline{S_2}$$

$$\Rightarrow III = 3 \cdot I + 2 \cdot II \Rightarrow \text{riga } 2 \times 3$$

con matr. incompleta di $\text{rank} = 2$

$\Rightarrow$ infinite soluzioni (sottosp. aff. di $\dim = 1$)

$$\boxed{t=1}$$

$$\begin{cases} 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 7x + 12y + 2z = -1 \end{cases}$$

Part: suppose $\underline{\text{II}}$ e $\underline{\text{III}}$ lin. indep:

$$\underline{\text{I}} = -\frac{2}{3} (7 \cdot \underline{\text{II}} - 2 \cdot \underline{\text{III}})$$

$$-1 \stackrel{?}{=} -\frac{2}{3} (7 \cdot 1 - 2 \cdot 1)$$

No

Nessuna soluzione

6.3.5. (c) calcolare i det delle onlate di $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{in } \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \dots \det \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6.3.6 d

Usando onloti calcolare

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & -5 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & 1 & 9 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

rank = 0 ?

No

rank = 1 ?

No

rank = 2 ?

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} 27 - 28 \\ +40 - 45 \\ +42 - 36 \end{array} = 109 - 109 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} -8 + 9 \\ -7 + 6 \end{array} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} -72 + 28 \\ -4 + 64 \\ -18 + 6 \end{array} = -94 + 94 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} 45 - 4 \\ -1 - 40 \end{array} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rank} = 2.$$

Trasformare da param. a cart. e viceversa
la presentazione di $E \subset \mathbb{R}^n$ affine dato.

$$\boxed{7.1.1} \quad E \subset \mathbb{R}^2 \quad E: 6x - 5y = 11$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{7.1.2} \quad E \subset \mathbb{R}^2 \quad E: \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = 5 + 6t \end{cases}$$

$$E = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3x - y = -26$$

7.1.4

$$E \subset \mathbb{R}^3$$

$$E: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 6 \\ -5x + y + 6z = 2 \end{cases}$$

$$\dim E = 1$$

Oss: se ho un sistema $k \times n$ $k \leq n$

e $\text{rank}(\text{matrice incompleta}) = k$

(cioè: le parti omogenee delle equaz. sono lin. indep)

allora $\text{rank}(\text{matrice completa}) = k$

perché il rango $\bar{e} \leq$ numero righe

(IN OGNI MATRICE) :

"rango per righe" = "rango per colonne"

//
 $\dim \text{Span}(\text{righe})$

"
 $\dim \text{Span}(\text{colonne})$

infatti trasponendo le righe diventano colonne
e viceversa ma i det delle sottomatr. quadrate
rimangono gli stessi)

$\Rightarrow$ il sistema ha soluzione che è
un sottosp. affine di dim $n-k$

$$E: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 6 \\ -5x + y + 6z = 2 \end{cases}$$

$$\dim E = 1$$

Cerco pts base con $z=0$:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5x + 2 \\ 2x - 15x - 6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot 6 - 1 \cdot 7 \\ -2 \cdot 6 - 5 \cdot 7 \\ 2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 25 \\ 47 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$x = -12/13$$

$$y = -34/13$$

$$\begin{pmatrix} -12/13 \\ -34/13 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 25 \\ 47 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 50 - 141 + 91 = 0 \\ -125 + 47 + 78 = 0 \end{cases}$$

✓

$$\begin{cases} y = 5x - 6z \\ 2x - 15x + 18z + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13x + 25z = 0 \\ y = 5x - 6z \end{cases}$$