

Algebra lineare 4/12/18

Numeri complessi

$$\mathbb{C} = \{ \alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \quad i \notin \mathbb{R} \quad i^2 = -1$$

$$\alpha + i \cdot 0 = \alpha \Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

$$(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta)$$

$$(\alpha + i\beta) \cdot (\gamma + i\delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma)$$

Fatto : $\mathbb{C}$ è un campo :

- 1) $z + 0 = z$
- 2) $\forall z \exists (-z) \text{ t.c. } z + (-z) = 0$
- 3) $z + (w + u) = (z + w) + u$
- 4) $z + w = w + z$
- 5) $z \cdot 1 = z$
- 6) $\forall z \neq 0 \exists z^{-1} \text{ t.c. } z \cdot z^{-1} = 1$
- 7) $z \cdot (w \cdot u) = (z \cdot w) \cdot u$
- 8) $z \cdot w = w \cdot z$
- 9) $z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$

Inverso : $z = \alpha + i\beta$; $z^{-1} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$.

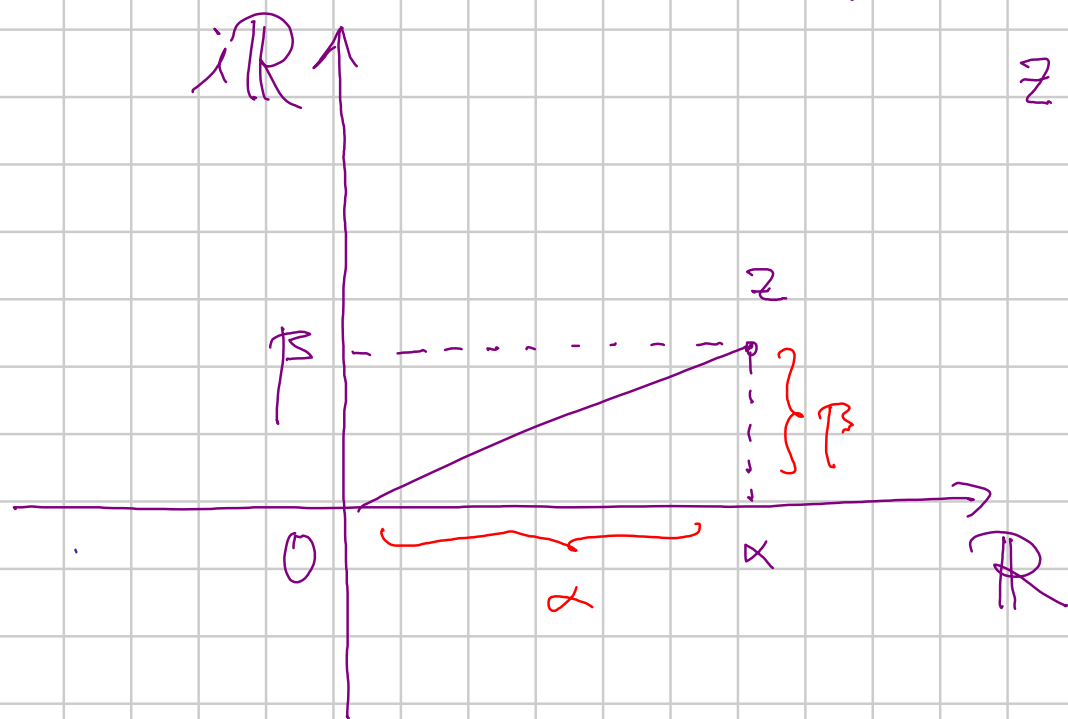
$z = \alpha + i\beta$; $\bar{z} = \alpha - i\beta$ coniugato di z

$\alpha = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$ parte reale $\mathcal{R}(z)$

$\beta = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})$ parte immaginaria $\mathcal{I}(z)$
($\mathcal{I}(z) \in \mathbb{R}$)

Proprietà : $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$; $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$; $\overline{\bar{z}} = z$

Oss: possiamo identificare $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$



$$z = \alpha + i\beta \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Nel piano euclideo

$$\text{dist}(0, z) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Lo chiamo modulo di z
indicato $|z|$.

Def: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$$(x + i\beta)(x - i\beta) = x^2 - (i\beta)^2 \\ = x^2 + \beta^2$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

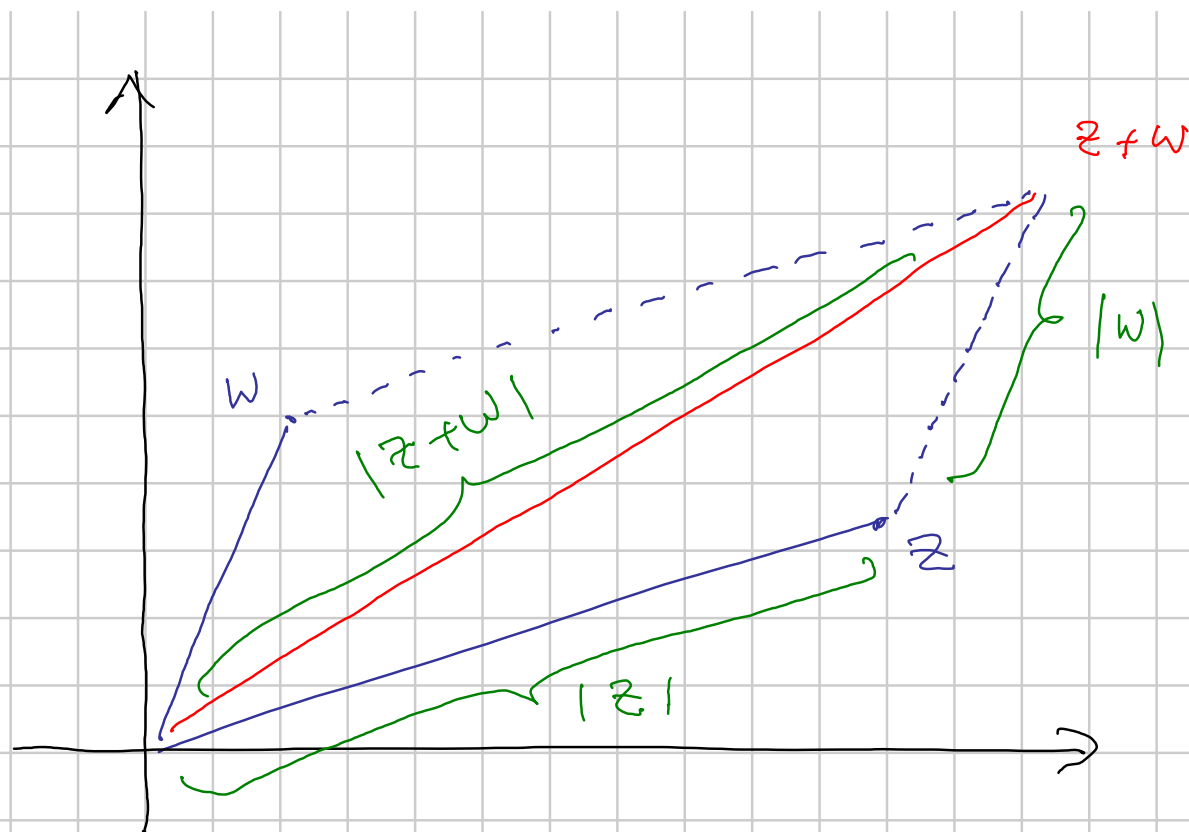
Def: $0 \leq |\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Prop: $|z + w| \leq |z| + |w|$

Dir:

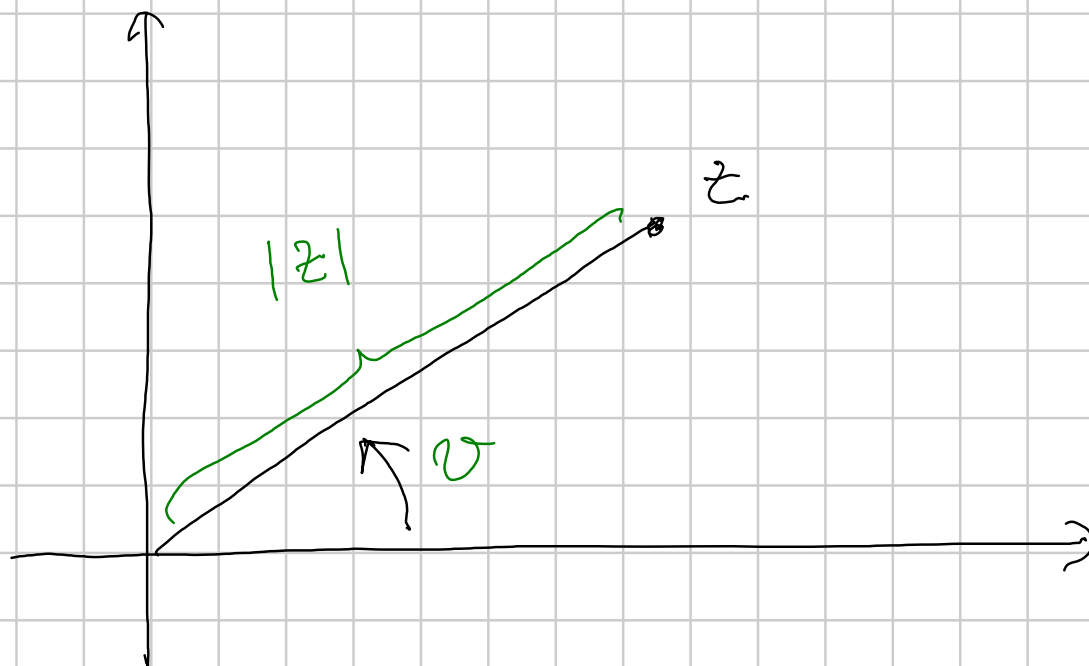
$$\begin{aligned}
 |z+w|^2 &= (z+w) \overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
 &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\
 &= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\
 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
 &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
 &= |z|^2 + 2|z|\cdot|w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.
 \end{aligned}$$





disuguaglianza
triangolare

Forma polar



$$\vartheta = \arg(z)$$

(ambiguo e mesmo
d. $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
para $z \neq 0$)

$$z = |z| \cdot (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$$

$$\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \vartheta^{2n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \vartheta^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} \vartheta^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} \vartheta^{2n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\vartheta)^k}{k!} = e^{i\vartheta}$$

Forma esponenziale $z = \rho e^{i\vartheta}$ $\rho = \text{modulo}$
 $\vartheta = \text{argomento}$

Con formule addizionali:

$$(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)) \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ = \cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi) -$$

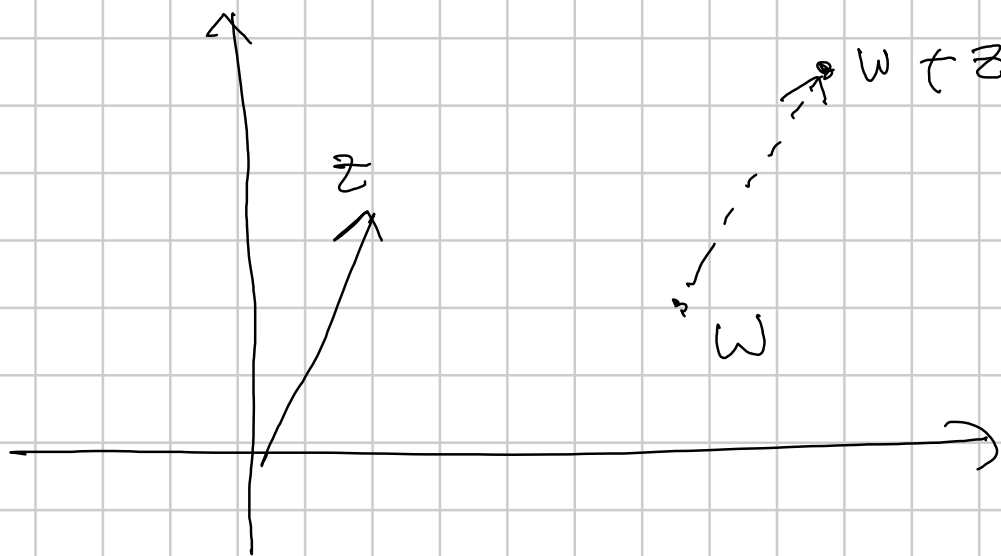
Oppure $e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\vartheta + \varphi)} -$

Prop: fissato $z = \rho e^{i\vartheta}$

(1) $\mathbb{C} \ni w \mapsto w + z \in \mathbb{C}$ $\bar{z}$ è la trasl. di z

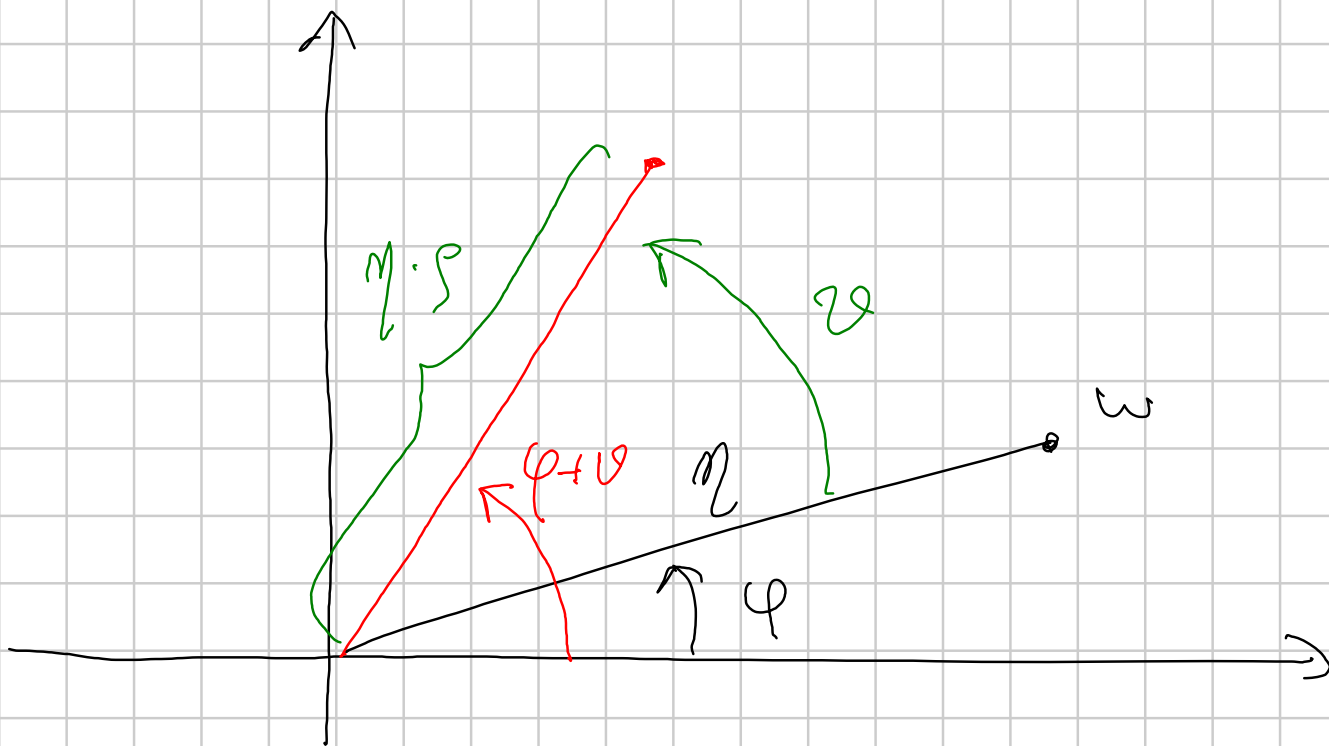
(2) $\mathbb{C} \ni w \mapsto w \circ z \in \mathbb{C}$ è la composizione
 di omotetie di ragione ρ
 con rotaz. intorno a 0 di ϑ .

$\oplus_{in} :$
 $(\uparrow)$



$$(2) \quad w = \eta \cdot e^{i\varphi}$$

$$w \cdot z = \eta \cdot \rho \cdot e^{i(\varphi + \vartheta)}$$



$$\mathbb{C}[Z] = \text{polinomi a coeff in } \mathbb{C} \text{ nelle indeterminate } z$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

stesse avventure del canoneale

Oss: per $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ l'eq. $x^n = \alpha$ ($x \in \mathbb{R}$) ha:

- n dispari : 1 soluz.

• n pari :

$$\alpha < 0 \quad 0 \text{ soluz.}$$

$$\alpha > 0 \quad 2 \text{ soluz.}$$

n -esime

Radici dell'unità : soluz. dell'eq. $z^n = 1$

Cerco soluz. $z = \rho e^{i\varphi}$:

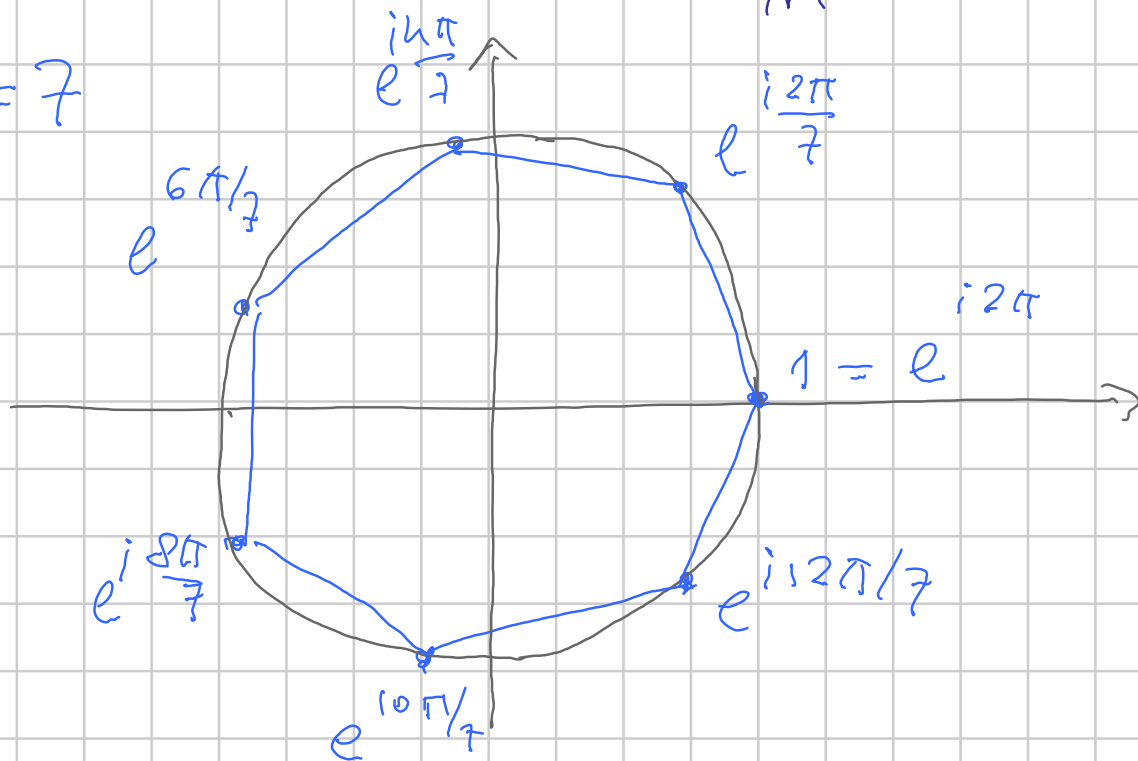
$$\rho^n \cdot e^{in\varphi} = 1 = 1 \cdot e^{i0}$$

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\varphi = 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$n=7$$



le radici n -esime
di 1 sono i
vertici di n -gono
regolare inscritto
in circonferenza
con 1 tra i vertici

$$1 = e^{i \frac{2\pi}{n} \cdot 0}, e^{i \frac{2\pi}{n} \cdot 1}, \dots, e^{i \frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)}, e^{i \frac{2\pi}{n} \cdot n} = e^{i 2\pi} = 1$$

Oss: ci sono n radici n -esime di 1.

Se $x \neq 0$, $x = \eta \cdot e^{i\varphi}$; soluz. di $z^n = x$

cerco $z = \rho e^{i\vartheta}$

$$\begin{cases} \rho^n = \eta \\ n\vartheta = \varphi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\eta} \\ \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

$\Rightarrow \alpha$ ha n radici n -esime distinte.

Quante radici ha un polinomio in $\mathbb{C}[z]$?

Su $\mathbb{R}$ $x^2 + 1$ non ha radici.

Teo (fondamentale dell'algebra):

$p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(p(z)) > 0$

$\Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $p(z_0) = 0$.

"ogni polinomio complesso non costante ha radici".

Divisione tra polinomi:

dati $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(g(z)) > 0$
esistono unici $q(z), r(z)$ t.c.

$$f(z) = g(z) \cdot q(z) + r(z), \quad \deg(r(z)) < \deg(g(z))$$

dividendo divisore quoziente resto

Teorema (Ruffini): $p(z)$ ha radice $z_0 \iff$ è divisibile per $z - z_0$.

Dim: $\Leftarrow$ Se $p(z) = (z - z_0) \cdot q(z)$ ho $p(z_0) = 0$

$\Rightarrow$ Supponiamo $p(z_0) = 0$ e dividiamo $p(z) : (z - z_0)$

$$p(z) = (z - z_0) \cdot q(z) + r(z)$$

$$\text{con } \deg(r(z)) < \deg(z - z_0) = 1$$

$$\Rightarrow \deg(r(z)) = 0 \Rightarrow r(z) \in \mathbb{C}$$

$r(z) = r$

$$\Rightarrow p(z) = (z - z_0) \cdot q(z) + r$$

$$\Rightarrow p(z_0) = (z_0 - z_0) \cdot q(z_0) + r$$

$$\parallel$$

$$0$$

$$\Rightarrow r = 0 \quad \Rightarrow p(z) = (z - z_0) \cdot q(z) \quad \square$$

Consideriamo $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ $\deg(p(z)) > 0$.

TFA : $\exists$ radice z_1

RUFF : $p(z) = (z - z_1) \cdot p_1(z)$

$$p_1(z_1) \begin{cases} = 0 & p_1(z) = (z - z_1) p_2(z) \Rightarrow p(z) = (z - z_1)^2 \cdot p_2(z) \\ \neq 0 & \end{cases}$$

procedo analogamente

$$p_2(z_1) \begin{cases} = 0 & p(z) = (z - z_1)^3 \cdot p_3(z) \\ \neq 0 & \end{cases}$$

Procedo finché non trovo

$$p(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot f(z) \quad \text{con } f(z_1) \neq 0$$

Def: in tal caso chiamo m_1 molteplicità della radice z_1 per il polinomio $p(z)$.

~~"molteplicità" = quante volte z_1 è radice di $p(z)$ "~~

Procedendo per $f(z)$... riesco a scrivere

$$p(z) = c \cdot (z - z_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - z_k)^{m_k}$$

$$c \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0$$

$z_1, \dots, z_k$ radici distinte di $p(z)$

$m_1, \dots, m_k$ loro molteplicità

$$m_1 + \dots + m_k = \deg(p(z))$$

Visto: un polinomio complesso di grado n
ha sempre n radici contate con la
loro molteplicità.

[6.1.17] (↓) Calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -8 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Use I rule per avere 0 su II colonne :

$$= \det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & 7 & -18 \\ 14 & 0 & 1 & -21 \\ 21 & 0 & 5 & -37 \end{pmatrix}$$

↑

$$= -(-1) \det \begin{pmatrix} 5 & 7 & -18 \\ 14 & 1 & -21 \\ 21 & 5 & -37 \end{pmatrix}$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 5 & 7 & 18 \\ 14 & 1 & 21 \\ 21 & 5 & 37 \end{pmatrix}$$

$$= - \det \begin{pmatrix} -93 & 0 & -129 \\ 14 & 1 & 21 \\ -49 & 0 & -68 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 93 & 129 \\ 49 & 68 \end{pmatrix} \\ = 49 \cdot 129 - 93 \cdot 68 = \dots$$

6.2.18 $A = (v_1, \dots, v_m)$ calculate $\det(B)$;

(a) $m=2$, $\det(A) = -3$, $B = (3v_1 - 2v_2, -5v_1 + 4v_2)$

Sol 1: $\det(B) = 3 \det(v_1, -5v_1 + 4v_2) - 2 \det(v_2, -5v_1 + 4v_2)$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \cdot (-5) \det(v_1, v_1) + 3 \cdot 4 \det(v_1, v_2) - 3 \\
 &\quad + (-2) \cdot (-5) \det(v_2, v_1) + (-2) \cdot 4 \det(v_2, v_2) \\
 &\qquad\qquad\qquad + 3
 \end{aligned}$$

$$= 12 \cdot (-3) + 10 \cdot 3 = -36 + 30 = -6$$

Sol 2 : $B = (3v_1 - 2v_2, -5v_1 + 4v_2)$

$$\begin{aligned}
 &= \underset{\substack{\parallel \\ A}}{(v_1, v_2)} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(B) = \det(A) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ = (-3) \cdot (12 - 10) = -6.$$

$$(c) \quad n=3 \quad \det(A) = -7 \quad B = (2v_1 + v_3, 5v_1 - v_2 + 3v_3, 4v_2 - v_3)$$

Sol 1: Usando lineare^c nelle colonne trova 12 addendi.

ma se evito di scrivere quelli con colonne ripetute:

$$= 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \det(v_1, v_2, v_3) + 2 \cdot 3 \cdot 4 \det(v_1, v_3, v_2)$$

$$1 \cdot 5 \cdot 4 \det(v_3, v_1, v_2) + 1 \cdot \cancel{(-1)} \cdot \cancel{(-1)} \det(v_3, v_2, v_1)$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\det(v_1, v_2, v_3)}_{-7} + 24 \cdot \underbrace{\det(v_1, v_3, v_2)}_{+7} + 20 \underbrace{\det(v_3, v_1, v_2)}_{-7}$$

Sol 2: $B = (v_1, v_2, v_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(B) = -7 \cdot (2 + 20 - 24)$$

Determinante di Vandermonde

dati $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$$n=2 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \neq \lambda_2 - \lambda_1 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$n=3 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \neq (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \lambda_3^2 + \lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2^2 \\ & - \lambda_2 \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3^2 - \lambda_3 \lambda_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3^2 - \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2) \\ & = \lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_3 \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2^2 \\ & \quad - \lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1^2 - \lambda_2 \lambda_1^2 \end{aligned}$$

Il generale: per induzione su n (visto $n=2,3$):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Uso permutazione riga
per ottenere 0 al
primo posto nell'ultima

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \lambda_2 & \dots & (\lambda_n - \lambda_1) \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2^{n-3} & \dots & (\lambda_n - \lambda_1) \lambda_n^{n-3} \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2^{n-2} & \dots & (\lambda_n - \lambda_1) \lambda_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

2. Uso formula di
Sarrus per ottenere 0 al
primo posto nella
permutazione



$$= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_m - \lambda_1)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & & \lambda_m \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{m-2} & \cdots & \lambda_m^{m-2} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{1 < j \leq m} (\lambda_j - \lambda_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq m} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$m-2$. Use seconda riga per
avere 0 al primo posto
sulla terza

$m-1$. Use prima riga per
avere 0 al primo posto
della seconda

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad ,$$

□

Soluzione alternativa:

Considero $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} :$

- $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è un polinomio in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

- Se $\lambda_i = \lambda_j$ per $i < j$ ho $f = 0$

$\Rightarrow$ $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è divisibile per ogni $\lambda_j - \lambda_i$
Ruffini

$\Rightarrow f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è multiplo di $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$

$$\begin{aligned} - \deg(f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) &= 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$= \deg\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)\right)^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = c \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$c \in \mathbb{R}$

Resta da convincersi che $c = 1$ calcolando
il coeff di $\lambda_n^{n-1} \cdot \lambda_{n-1}^{n-2} \dots \lambda_2$ (esenzia).