Lezione 2-10-2018

Leone.slavich@gmail.com

Ricevimento: Giovedì 10:00

Dip. Mat Studio 113 (piano terra edificio A)

Tecniche di dimostrazione

Dimostrazione diretta

Prop: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\left[n=4 \quad 0+1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \right]$

Chiamiamo S_n il risultato della somma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots\dots + (n-1) + n$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots\dots + 1 + 0$$

$$\| \quad \| \quad \| \qquad \| \quad \|$$

$$2 \cdot S_n = n + n + \dots\dots + n + n = n \cdot (n+1)$$

$$2 \cdot S_n = n \cdot (n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}. \quad \square$$

Proposizione: Sia $n \in \mathbb{N}$ naturale.
Allora n e' divisibile per $9 \Longleftrightarrow$ la somma delle cifre di n e' divisibile per 9.

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot 10^k, \text{ dove } 0 \le a_k \le 9 \quad \forall k = 0, \dots, p$$

$$\left(357 = 7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 \right)$$

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot 10^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot \left(1 + 10^k - 1\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot (10^k - 1) =$$

$$10^k = 1\underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{k}.$$

$$10^k - 1 = 9\,9 \ldots\ldots 9 = 9 \cdot (1 \ldots\ldots 1).$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot 9 \cdot (\underbrace{1 \ldots\ldots 1}_{k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k + 9 \cdot \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot (\underbrace{1 \ldots\ldots 1}_{k}) = \sum_{k=0}^{p} a_k + 9 \cdot m.$$

$m \in \mathbb{N}$

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k + g \cdot m \qquad m \in \mathbb{N}$$

n multiplo di $g \Rightarrow n = g \cdot m'$, $m' \in \mathbb{N}$

$$g \cdot m' = \sum_{k=0}^{p} a_k + g \cdot m \Rightarrow \sum_{k=0}^{p} a_k = g \cdot m' - g \cdot m =$$

$$= g(m' - m). \ \square$$

somma delle cifre di n

$$n = g \cdot m'' + g \cdot m = g \cdot (m'' + m)$$

$$\Uparrow$$

Viceversa se $\sum_{k=0}^{p} a_k = g \cdot m''$, $m'' \in \mathbb{N}$

Dimostrazioni per induzione:

- Sia $P(n)$ relativo a un naturale $n \in \mathbb{N}$.

Per dimostrare che $P(n)$ e' vero per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ e' sufficiente:

1) Dimostrare che $P(0)$ e' vera (Passo base)

2) Supponendo $P(n)$ vera per un generico $n \in \mathbb{N}$ — ipotesi induttiva

dimostrare che $P(n+1)$ vera — tesi induttiva

$$\underbrace{P(n) \text{ vera} \Rightarrow P(n+1) \text{ vera}}_{\text{passo induttivo}}$$

- $P(0)$ vero è passo base
- $P(1)$. uso passo induttivo $P(0)$ vero $\Rightarrow P(1)$ vero per passo induttivo
- $P(2)$ vero poiché $P(1)$ vero $\Rightarrow P(2)$ vero

Esempio: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} =: P(n)$

Dim per induzione:

Passo base: $0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ ok.

Passo induttivo:

Ipotesi induttiva: $P(n)$ sia vera: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Vogliamo dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) =$$

= per l'ipotesi induttiva

$$= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dimostrazioni per assurdo:

Nego la tesi e ne deduco la negazione dell'ipotesi oppure di un fatto già noto come vero.

Esempio: Dimostrare che l'equazione $x^2=2$ non ha soluzioni $x \in \mathbb{Q}$.

Dim per assurdo supponiamo che esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2=2$

Scriviamo $\underset{\neq 0}{x} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ non nulli e primi fra loro (privi di fattori comuni > 1)

$x^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow$

p^2 è pari $\Rightarrow p$ è pari $\Rightarrow p = 2 \cdot k \quad \underset{\neq 0}{k} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (2k)^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow 4 \cdot k^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 2 \cdot k^2$

$\Rightarrow q^2$ e' pari $\Rightarrow q$ e' pari

già visto che p e' pari $\Rightarrow$ q e p hanno 2 come fattore comune

Assurdo perché abbiamo scelto q e p coprimi $\square$

Esempio: Dimostrare che se $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sono una terna pitagorica*, allora almeno uno tra a e b deve essere pari

$* \; a^2 + b^2 = c^2$

Dim. per assurdo. Supponiamo che $\exists\, a, b, c \in \mathbb{Z}$ tali che $a^2+b^2=c^2$ con a e b entrambi dispari

negazione della tesi

Scriviamo $a = 2\cdot k+1$
$b = 2\cdot h+1$ per $h, k \in \mathbb{Z}$

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2h+1)^2=4k^2+4k+1+4h^2+4h+1=$$
$$=4\left(k^2+k+h^2+h\right)+2$$

Segue che il resto della divisione di $\underset{\overset{\shortparallel}{c^2}}{a^2+b^2}$ per 4 e' uguale a 2.

Abbiamo due casi possibili:

1) c e' pari $\Rightarrow c = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow c^2 = 4 \cdot n^2 \Rightarrow$ c^2 e' multiplo di 4 ↯ Assurdo

2) c e' dispari $\Rightarrow c = 2 \cdot n + 1$, per $n \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow c^2 =$
$= (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2+n) + 1$ Assurdo

Osservazione:

Dimostrare per assurdo un'implicazione del tipo $P \Rightarrow Q$ è equivalente a dimostrare

$\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$

contronominale di $P \Rightarrow Q$ ed è ad essa equivalente.

Esempio: Dato $n \in \mathbb{N}$, n è multiplo di 6 — P
$\iff$ n è multiplo di 3 e di 2. — Q

Vogliamo dimostrare $P \iff Q$.

Possiamo dimostrare $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$

oppure dimostriamo $P \Rightarrow Q$ e $\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q)$

- $P \Rightarrow Q$, cioè se n è multiplo di 6, allora n è multiplo di 3 e di 2.

Dim: $n = 6 \cdot k = 3 \cdot (2k)$ – n multiplo di 3
$k \in \mathbb{Z}$ $\quad = 2 \cdot (3k)$ – n multiplo di 2.

- Dimostriamo che non(P) $\Rightarrow$ non(Q), cioè
Se n non è un multiplo di 6, allora non è multiplo di 3 oppure di 2.

- Se n non è multiplo di 6, allora il resto di $n:6$ può essere solo 1, 2, 3, 4, 5

1) $n = 6k+1$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n = 6k+1 = 2 \cdot 3k+1$ – n non e' multiplo di 2

$= 3 \cdot 2k+1$ – n non e' multiplo di 3

2) $n = 6k+2 = 3 \cdot 2k+2$ – n non e' multiplo di 3

(n : 3 ha resto 2)

3) $n = 6k+3 = 6k+2+1 =$

$= 2(3k+1)+1$ (n : 2 ha resto 1, n non e' un multiplo di 2)

4) $n = 6k + 4 = 6k + 3 + 1 = 3(2k+1) + 1$

(n : 3 ha resto 1
n non è multiplo di 3)

5) $n = 6k + 5 = 2(3k+2) + 1$
$3 \cdot (2k+1) + 2$

(n non è multiplo
di 2 né di 3)