

Matematica e statistica 22/11/17

Calcolo combinatorio

Consideriamo eventi / fenomeni per i quali esiste un certo numero finito di scelte / possibilità.

Es: pescare un numero in sacchetto tombola
possibilità: $1, 2, \dots, 89, 90$

Es: scegliere una lettera: $A, B, \dots, X, Y, Z$

Fatto: se ho due eventi/scelte indipendenti,
il numero totale è il prodotto delle due.

Es: quante sono le possibili taghe auto?

let - let - num - num - num - let - let

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26$$

$$= 10^3 \cdot 26^4 = \dots$$

PERMUTAZIONI : ho un insieme finito con
n oggetti e considero tutti i modi di riordinarlo.

Es: Permutazioni di 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono
3, 4, 5, 2, 6, 1 e 5, 6, 4, 3, 1, 2 ...

Fatto: ce ne sono $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 2 \cdot 1$
 $= m!$

COMBINAZIONI : ho un insieme con n oggetti
e voglio scegliere un sottoinsieme

Con k oggetti.

Es: i sottoinsiemi con 2 elementi di
 A, B, C, D, E sono:

A, B	A, C	A, D	A, E	B, C	B, D
B, E	C, D	C, E	D, E		

$\boxed{10}$

Fatto: ce ne sono $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Es: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10$

Q: Come faccio a sapere k oggetti tra n ?

A1: - li ordino in tutti i modi possibili $n!$

- scelgo i primi k
- dimentico l'ordine dei primi k
- dimentico l'ordine degli ultimi $n-k$

$$\frac{\frac{n!}{k!}}{k! \cdot (n-k)!}$$

A2 :... li ordino in un modo fisso

- ne scelgo k $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$
- dimentico l'ordine

$$\begin{aligned}
 & \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \\
 = & \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1) \cdots 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}
 \end{aligned}$$

$\binom{n}{k}$ è anche detto coefficiente binomiale
 perché

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

Yufall:

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

coeff di a^2b^3 : tanto quanto le scelte
di 2 dei 5 monomi che danno a
(mentre gli altri 3 danno b)

$$= \text{scelte di 2 ops. Tra } 5 = \binom{5}{2} = 10$$

Calcolo di $\binom{n}{k}$: triangolo di Tartaglia:

Oss: $\binom{n}{0} = 1$

$$\binom{n}{n} = 1.$$

$$M = 2$$

$$\binom{6}{2} = 15$$

$$m = 7$$

Probabilite

Evento elementare = esito esperimento / modo di manifestarsi di fenomeno

Spazio degli eventi : tutti gli eventi elem.

Evento : un insieme di eventi elem.

ES : fenomeno = estrazione di numero e tabelle

Spazio eventi = $\{1, 2, \dots, 89, 90\}$.

Evento = uno dei 15 delle mie cartelle

Evento = un multiplo di 3

Evento = "17"

Probabilità elementare: se tutti gli eventi elem.

hanno stesse possibilità di realizzarsi,

probabilità evento E è $p(E) = \frac{\text{num. el. di } E}{\text{num. di tutti gli eventi elem.}}$

Es: $P(\text{uno dei 15 della mia cartella}) = \frac{15}{90}$

$$P(\text{multiplo di 3}) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$P(17) = \frac{1}{90}$$

Esempio: fenomeno = estrazione di due carte
da un mazzo da 40

$$p(\text{estrazione di 2 assi}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

↑
estraz. asso
del primo
↑
estraz. asso
del secondo

o P P u e

num. estraz.
possibili di
2 anni

$$\binom{4}{2}$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$= \frac{1}{130}$$

num. totale L.
estrazioni possibili
di 2 carte su 40

$$\binom{40}{2}$$

$$\frac{40 \cdot 39}{2}$$

Scommessa equa.

Facciamo scommesse su un evento che ha probabilità p di realizzarsi; paghiamo somma t ; supponiamo che se vinciamo otteniamo somma v . Equ?

Prob. vittoria p ; bilancio se vinto : $v - t$
Prob. perdita $1 - p$; bilancio se perso : $-t$

Bilancio atteso (quel che mi aspetto in media se ripeto moltissime volte):

$$\begin{aligned} & p \cdot (V - \Delta) + (1 - p) \cdot (-\Delta) \\ &= p \cdot V - p \cdot \Delta - \Delta + p \cdot \Delta = p \cdot V - \Delta \end{aligned}$$

Scovumene epue: deve fare 0

$$\Rightarrow \text{scovumene epue se } V = \frac{1}{p} \cdot \Delta$$

Es: lancio moneta $p = \frac{1}{2}$, e poi $\times$ $v = 2 \cdot 1$

Es: lancio dado $p = \frac{1}{6}$, e poi $\times$ $v = 6 \cdot 1$

Es: Roulette, uscita rosso: nella realtà $v = 2 \cdot 1$;

per l'equità $v = \frac{1}{p} \cdot 1 = \frac{37}{18} \cdot 1 = 2.06... \cdot 1$

$$p = \frac{18}{37}$$

Quasi equo

E_S: lotto classico; punto su ambo; redatta

$$V = 250 \cdot t \quad \text{Sarebbe equo se} \quad V = \frac{1}{p} \cdot t$$

$$p = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}}$$

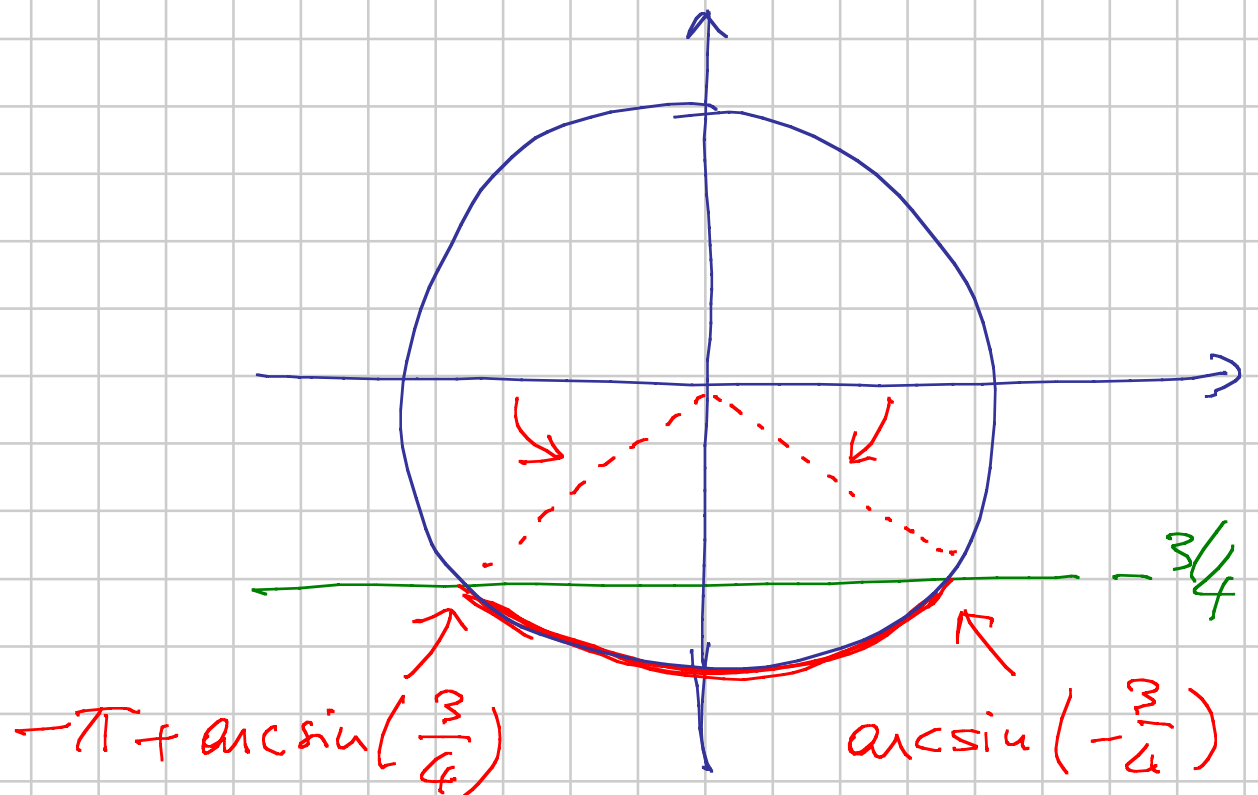
$$\frac{1}{p} = 400.5$$

MOLTO MENO EQUO,

Disuguaglianze trigonometriche

(15) $4 \sin(x) < -3$

$$\sin(x) < -\frac{3}{4}$$



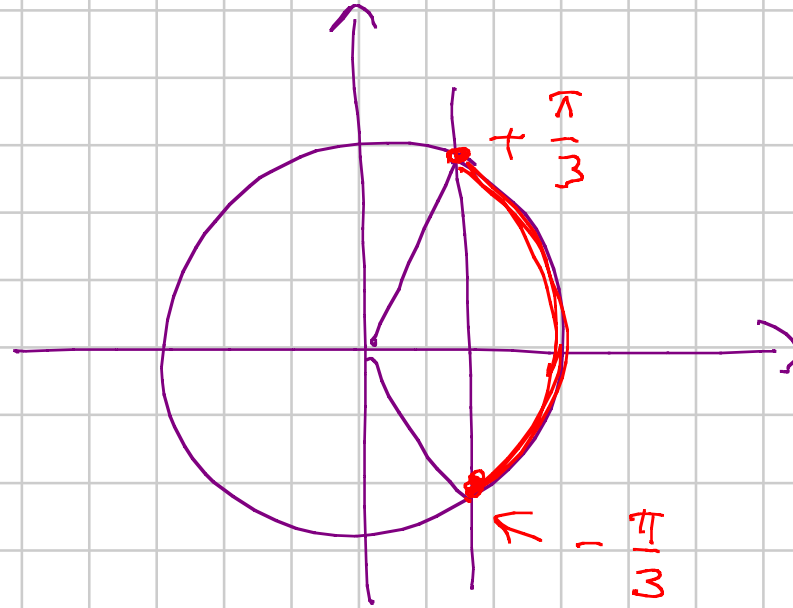
$$= -\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Soluz: } (2k-1)\pi + \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) < x < 2k\pi - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(16) \quad 2\cos(x) \geq 1$$

$$\cos(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

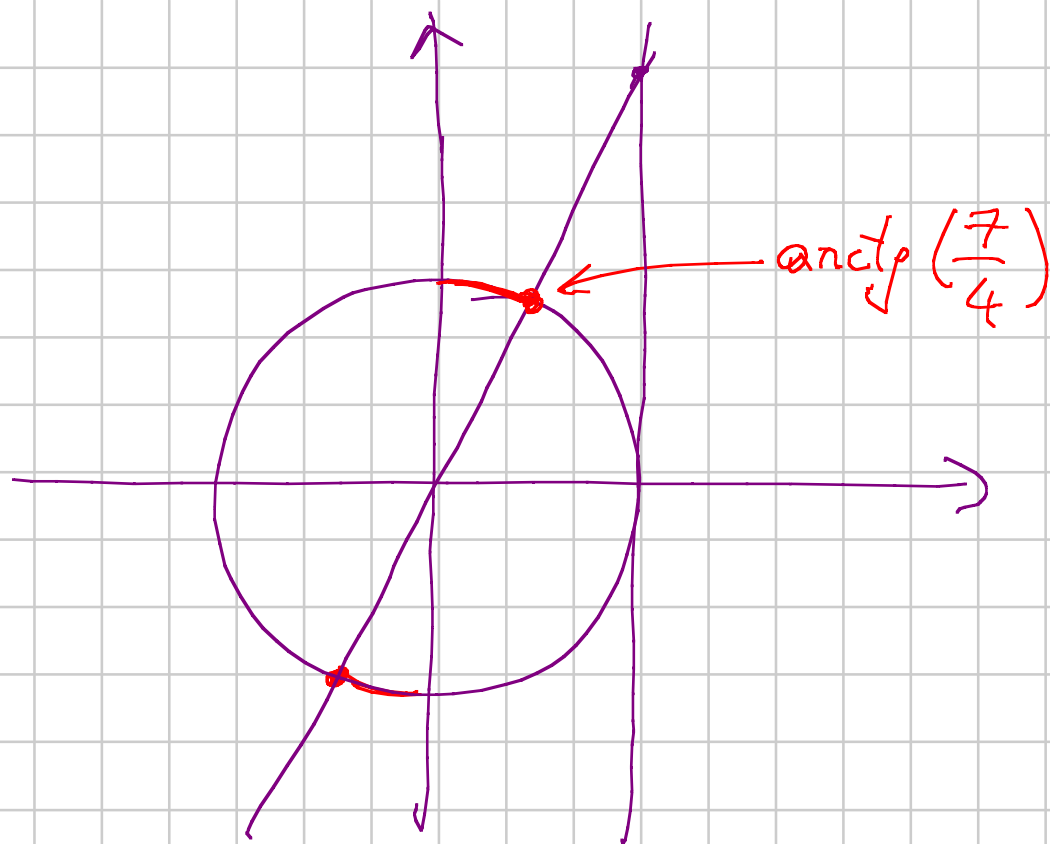


17

$$4 \arctan(x) \geq 7$$

$$\arctan(x) \geq \frac{7}{4}$$

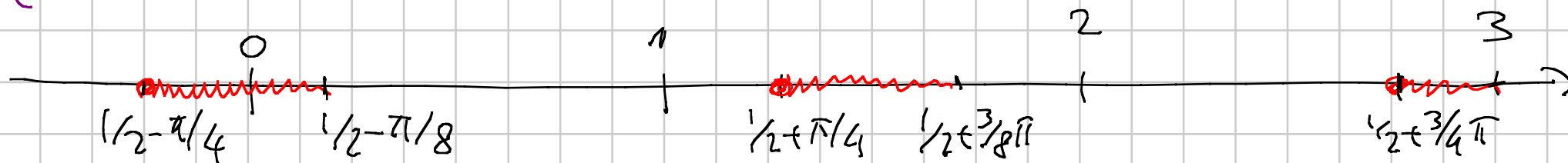
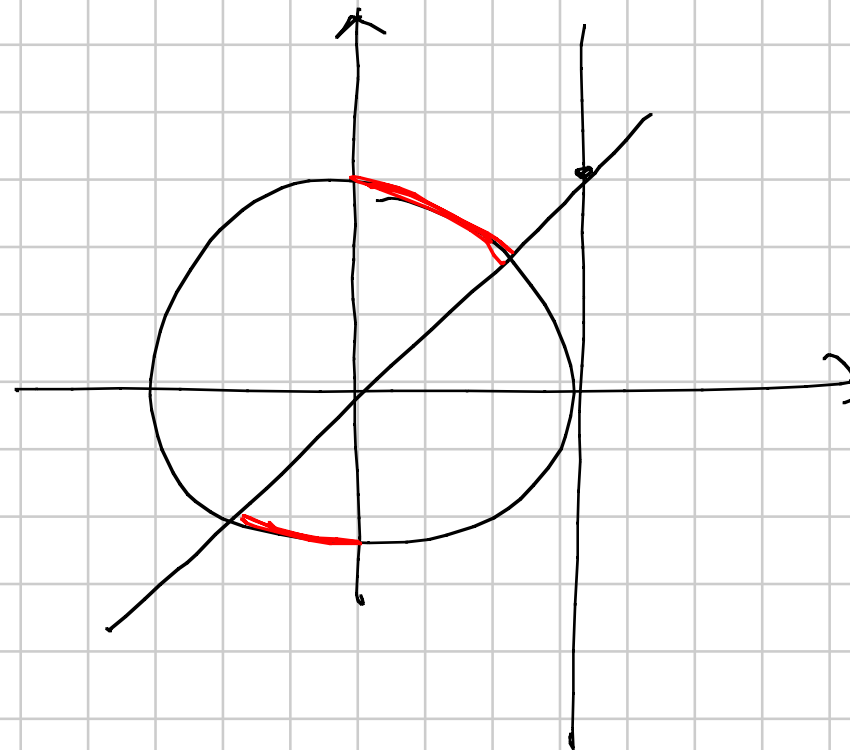
$$k\pi + \arctan\left(\frac{7}{4}\right) \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$k \in \mathbb{Z}$$



$$(18) \quad \begin{cases} t_p(1-2x) \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 1-2x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} - k\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$$

19) $2\cos^2(x) + 5\cos(x) - 3 > 0$

$t = \cos(x) \quad 2t^2 + 5t - 3 > 0$

Eq. amoc. $2t^2 + 5t - 3 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \begin{matrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{matrix}$

Дарпе $2t^2 + 5t - 3 = (t + 3)(2t - 1)$

equivale a $2\cos(x) - 1 < 0$ $\cos(x) > \frac{1}{2}$

...

20 $\sin^3(x) \leq \sin(x)$

$$\sin^3(x) - \sin(x) \leq 0$$

$$\sin(x) \cdot (\sin^2(x) - 1) \leq 0$$

$$-\sin(x) \cos^2(x) \leq 0$$

$$\sin(x) \cdot \cos^2(x) \geq 0$$

$$\cos(x) = 0$$

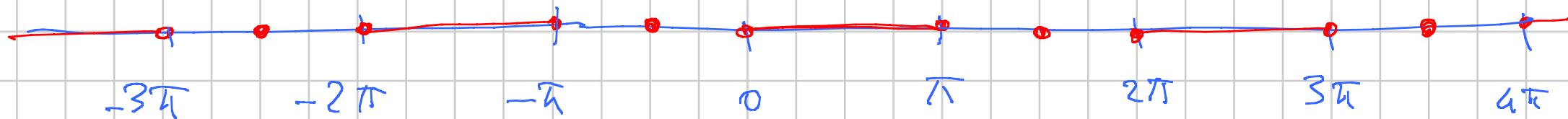
oppure

$$\sin(x) \geq 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

oppure

$$2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$$



$$(21) \quad \cos(2x) + \cos(x) > -1$$

$$2\cos^2(x) - 1 + \cos(x) > -1$$

$$\cos(x) (2\cos(x) + 1) > 0$$

$$\cos(x) > 0$$

or

$$2\cos(x) + 1 < 0 \quad \dots$$

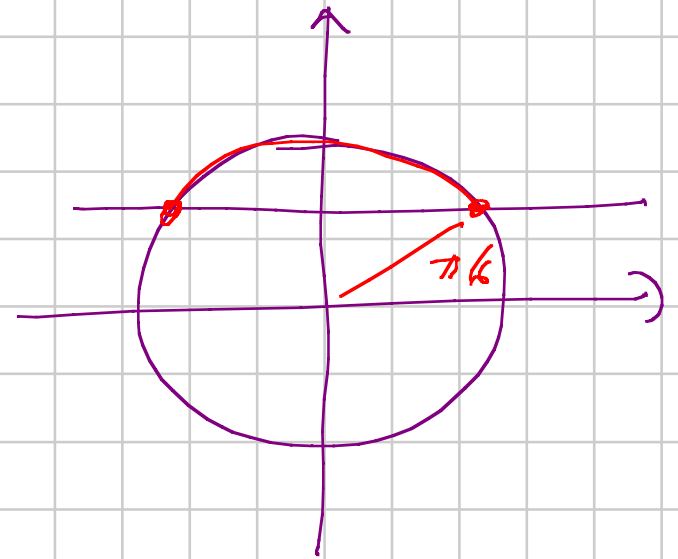
(22)

$$\sin(x) - \sqrt{3} \cos(x) > 1$$

$$\frac{1}{2} \sin(x) - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x)}_{\parallel \sin(-\frac{\pi}{3})} > \frac{1}{2}$$

$\parallel$
 $\cos(-\frac{\pi}{3})$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$$



$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

————— 0 —————

Studiere

$$f(x) = \frac{x-2}{3-2x-x^2}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{(3+x)(1-x)}$$

Domínio $x \neq -3$, $x \neq 1$

limiti : $-\infty$: 0^+

$-3^\pm$: $\mp \infty$

$1^\pm$: $\mp \infty$

$+\infty$: 0^-

$$f(x) = 0 \quad \text{per } x = 2 \quad f(0) = -\frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{3-2x-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (3-2x-x^2) + (x-2) \cdot (+2+2x)}{(3-2x-x^2)^2}$$

$$= \frac{3-2x-x^2-4-2x+2x^2}{(\quad)^2} = \frac{x^2-4x-1}{(\quad)^2}$$

Nulla per $x = -2 \pm \sqrt{5}$.