Matematica e statistica 17/10/17

→ fino al 3/11 solo martedì

→ in rete regole esame

→ solo io (Mat/stat).

Esercizi per casa.

(4) $k^2x^2 - \cancel{k^2} - kx + \cancel{k^2} + 2kx^2 = 0$

$k(k+2)x^2 = kx$

No

$$\cancel{k}(k+2)x^2 = \cancel{k}x$$

$$k(k+2)x^{\cancel{2}} = k\cancel{x}$$

Se $k=0$ equaz. indeterminata ($\forall x \in \mathbb{R}$ è soluz.)

Se $k \neq 0$ equivale a $(k+2)x^2 = x$

Ho sempre la soluzione $x = 0$.

Quoltre ho le soluzioni di $(k+2)x = 1$.

Se $k=-2$ ho solo $x=0$; se $k \neq -2$ ho anche $x = \frac{1}{k+2}$.

5 $\underline{x^2} + \underline{ax} - a^2 + 2a \cancel{-1} - a^2 \cancel{+1} + \underline{x} = 0$

$x^2 + (a+1)x + a(2-a) = 0$

$\Delta = a^2 + 2a + 1 - 8a + 8a^2 = 9a^2 - 6a + 1$

$= (3a-1)^2$

Se $a = 1/3$ ho soluz. unica $\dfrac{-\left(\frac{1}{3}+1\right)}{2} = -\dfrac{2}{3}$.

Altrimenti soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-(a+1) \pm (3a-1)}{2} = \begin{cases} a-1 \\ -2a \end{cases}.$$

⑥ $4x^4 - 21x^2 + 5 = 0$

$t = x^2 \rightsquigarrow 4t^2 - 21t + 5 = 0 \quad t_{1,2} = \begin{matrix} 5 \\ 1/4 \end{matrix}$

$t_1 = 5 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

$t_2 = 1/4 \Rightarrow x^2 = 1/4 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$

7 $6x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0.$

· Candidate soluz. raz. $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}.$

$x = +\frac{1}{2} \qquad 6 \cdot \frac{1}{8} - 13 \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} + \frac{7}{2} - 1$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} - 1 = +1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

$x_1 = 1/2$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 6 & -13 & 7 & -1 \\ 1/2 & & 3 & -5 & 1 \\ \hline & 6 & -10 & 2 & \checkmark \end{array}$$

$$6x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = (x - 1/2)(6x^2 - 10x + 2)$$

$$= (2x-1)(3x^2-5x+1)$$

$$\downarrow$$

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

10 $x^2 - x + x^2 - 4x - 4 - 1 - x^2 + 12 - 3x > 0$

$x^2 - 8x + 7 > 0$ $\qquad (x-1)(x-7) > 0$

Soluz : $x < 1$ oppure $x > 7$.

13 $\quad x^2 - (k+1)x + k \leq 0$

$$\Delta = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$$

$k = 1 \qquad (x-1)^2 \leq 0 \qquad$ Soluz. $x = 1$

$$k \neq 1 \qquad x_{1,2} = \frac{(k+1) \pm (k-1)}{2} \begin{cases} \nearrow k \\ \searrow 1 \end{cases}$$

Soluz: se $k < 1$, $k \le x \le 1$

se $k > 1$, $1 \le x \le k$.

(15) $-x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 8x - 24 > 0$

Candidate soluz. dell'eq. associata sono

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$

$\pm 2: \quad \cancel{-16} \; \cancel{\mp 16} \; \cancel{+40} \; \cancel{\pm 16} \; \cancel{-24} = 0$

Scoperto che ± 2 sono radici $\Rightarrow$ polinomio divisibile per $(x-2)$ e $(x+2)$ $\Rightarrow$ divisibile per $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$;

Divisione :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
-x^4 & -2x^3 & +10x^2 & +8x & -24 & x^2-4 \\ \cline{6-6}
x^4 & & -4x^2 & & & -x^2-2x+6 \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +6x^2 & +8x & -24 & \\
 & 2x^3 & & -8x & & \\ \cline{2-5}
 & & 6x^2 & & -24 & \\
 & & -6x^2 & & +24 & \\ \cline{3-5}
\end{array}
$$

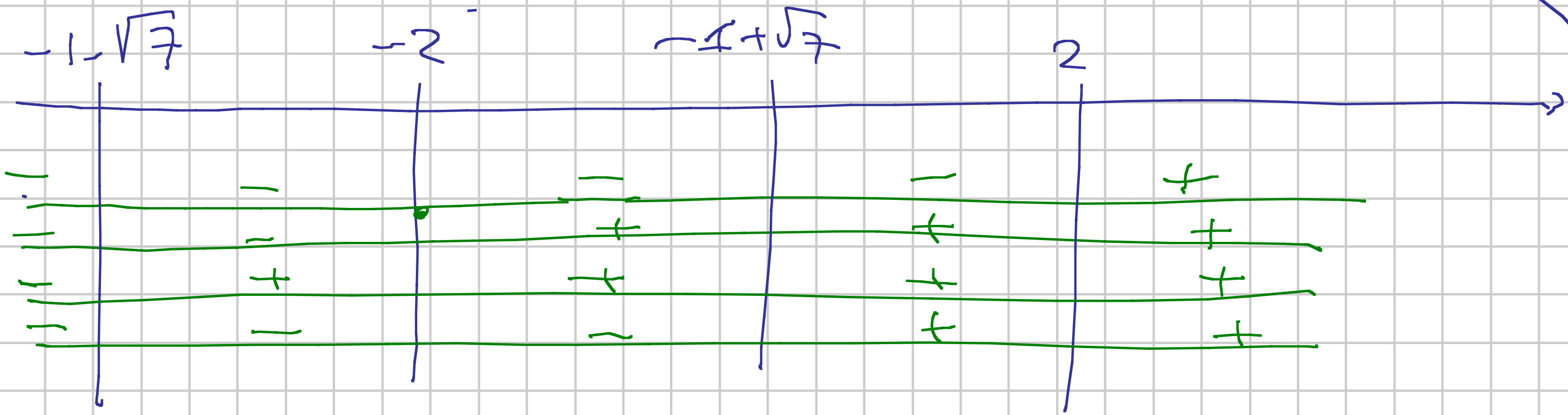
Diseq. equival: $(x-2)(x+2)(-x^2-2x+6) > 0$

$$(x-2)(x+2)(x^2+2x-6) < 0$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2 \qquad x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{7}$

$+1.6\ldots$

$-3.6\ldots$



Soluz : $-1-\sqrt{7} < x < -2$ oppure $-1+\sqrt{7} < x < 2$.

18

$$-\frac{x^2+2x}{(x-6)(x+3)} \geq \frac{2}{x+3}$$

No

$$-\frac{x^2+2x}{(x-6)\cancel{(x+3)}} \geq \frac{2}{\cancel{x+3}}$$

I:

$x = -3$ Impossibile.

$x > -3$ equivale a $-\dfrac{x^2+2x}{x-6} \geq 2$

$x < -3$ equivale a $-\dfrac{x^2+2x}{x-6} \leq 2$ ...

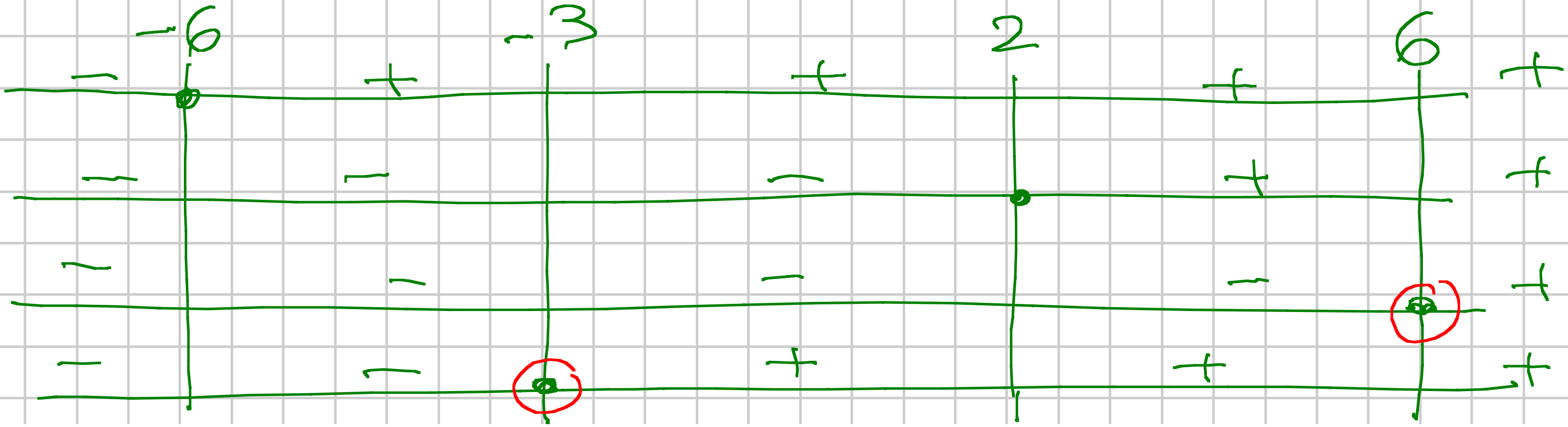
II:

Equivale a:

$$\frac{-x^2-2x-2x+12}{(x-6)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{x^2+4x-12}{(x-6)(x+3)} \leq 0$$

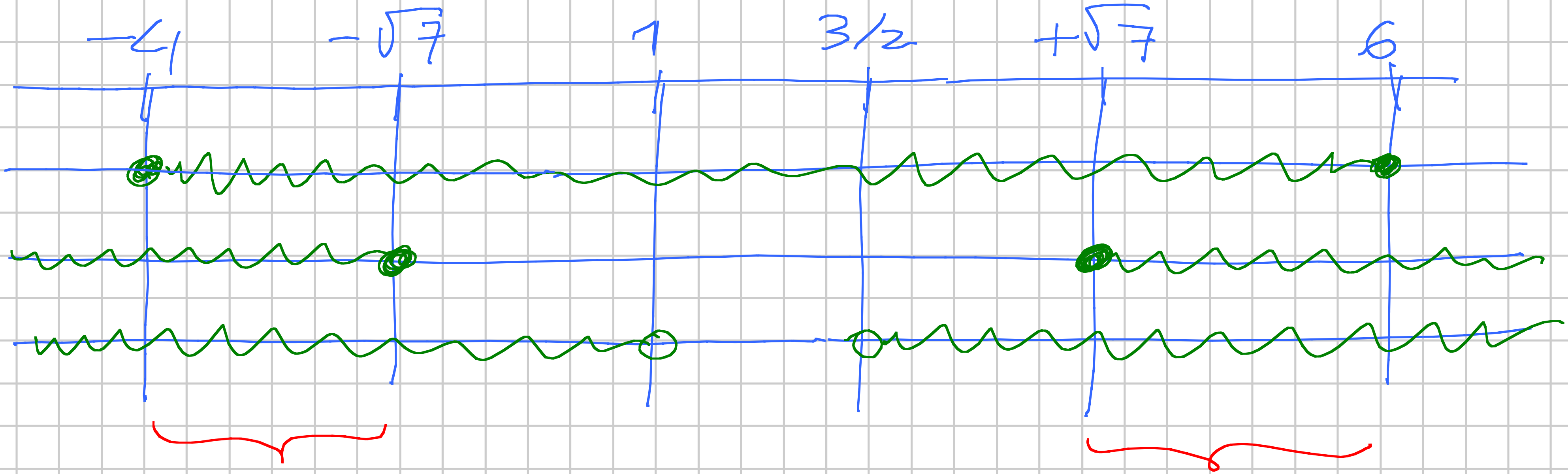
$$\frac{(x+6)(x-2)}{(x-6)(x+3)} \leq 0$$



Soluz: $-6 \le x < -3$ opp. $2 \le x < 6$.

(20) $\begin{cases} x^2 - 2x - 24 \le 0 \\ 7 - x^2 \le 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-6)(x+4) \le 0 \\ x^2 \ge 7 \\ (2x-3)(x-1) > 0 \end{cases}$

Valori critici: $6, -4, \pm\sqrt{7}, 3/2, 1$



$-4 \le x \le -\sqrt{7}$ oppure $\sqrt{7} \le x \le 6$.

21 $\quad |x+1| - x^2 = 2x - 1$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1-x^2 = 2x-1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ -x-1-x^2 = 2x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ \underbrace{x^2+x-2=0} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ \underbrace{x^2+3x=0} \end{cases}$$

$\cancel{x=-2}$ $\quad x=+1 \qquad\qquad \cancel{x=0}, \quad x=-3$

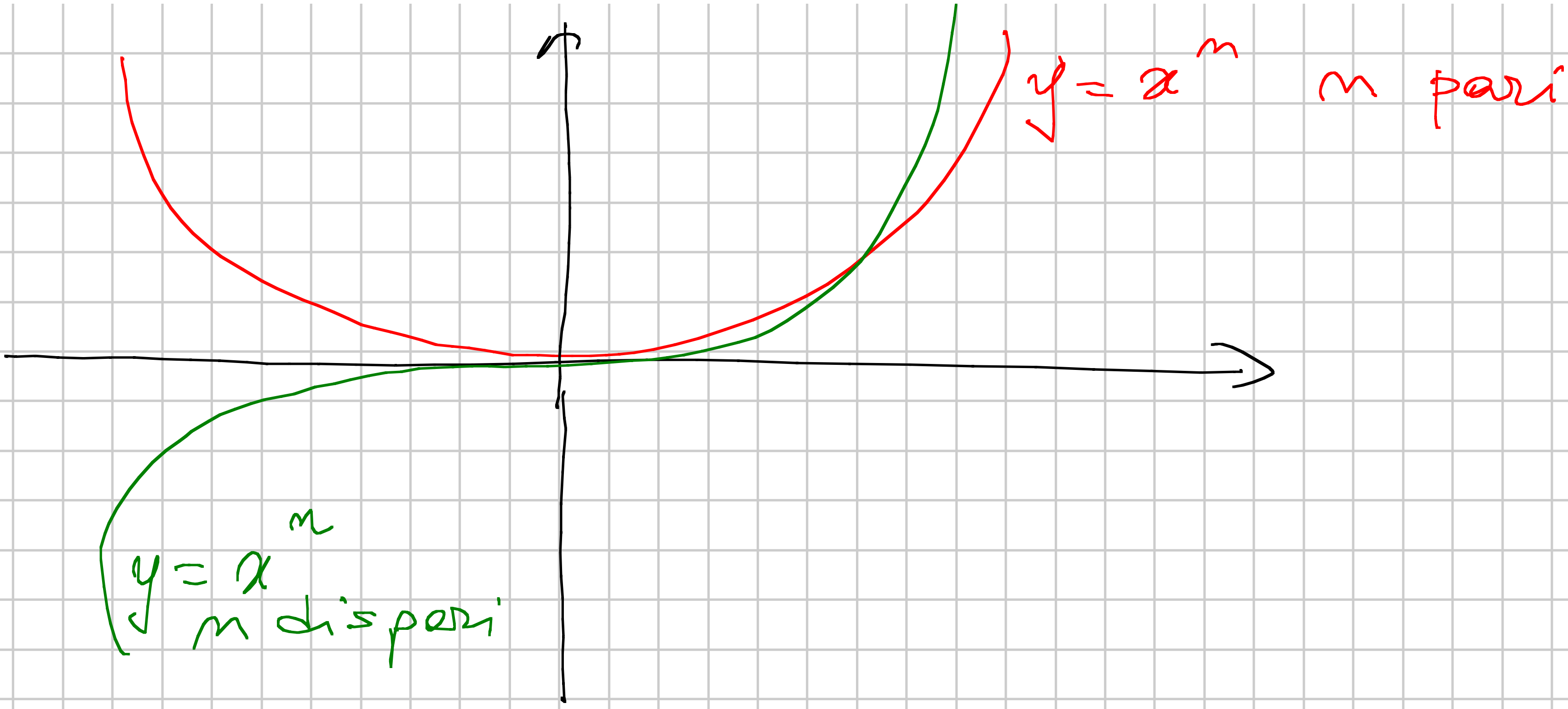
Due soluz.: $x = 1$, $x = -3$.

—— o ——

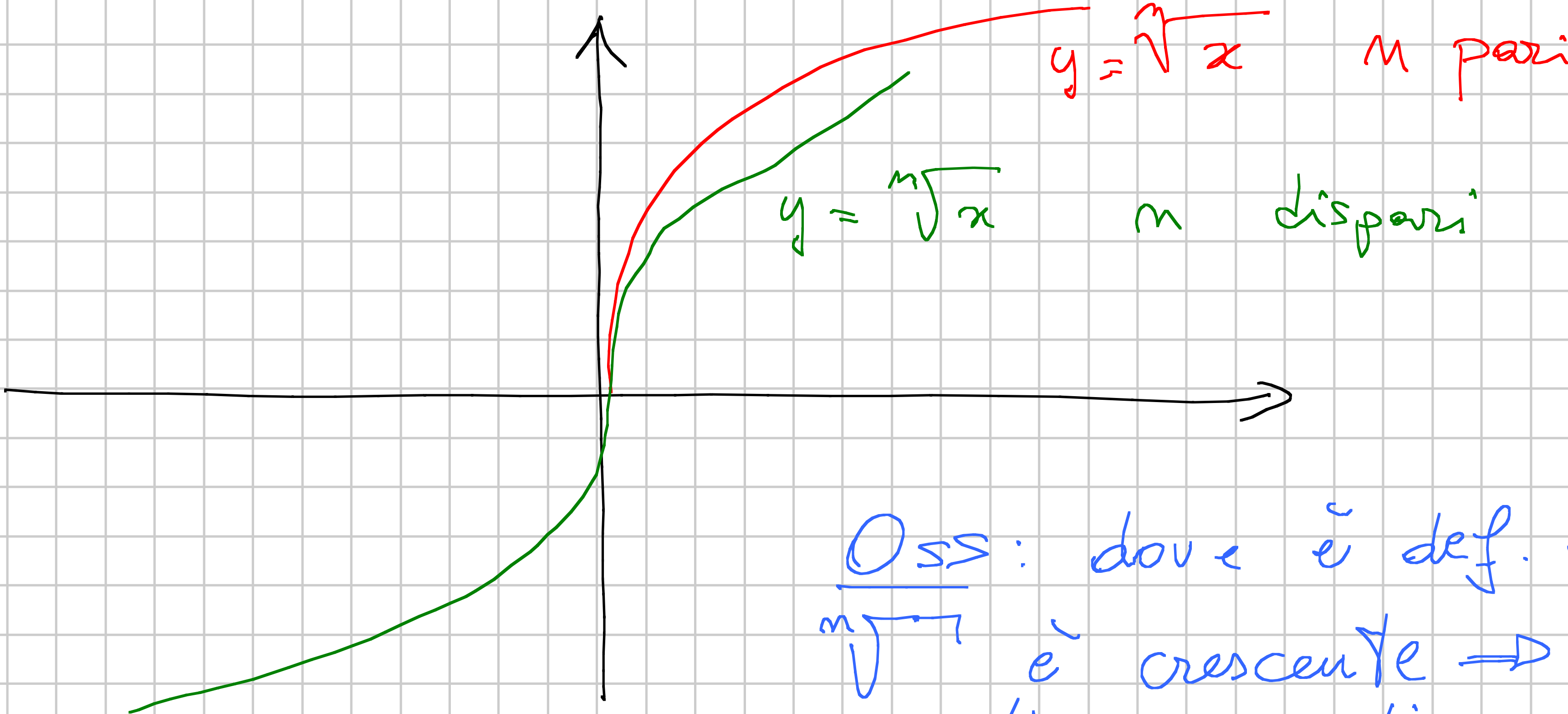
Radicali:

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} n \text{ pari} & \begin{cases} a < 0 & \text{non esiste} \\ a \geq 0 & \text{l'unico } b \geq 0 \text{ t.c. } b^n = a \end{cases} \\ n \text{ dispari} & \text{l'unico } b \text{ t.c. } b^n = a. \end{cases}$$

Equaz. con radicali:



$y = x^n$ n pari
$y = x^n$
n dispari



<u>Oss</u>: dove è def. la $\sqrt[n]{}$ è crescente $\Rightarrow$ mantiene verso disuguaglianza

o) $\sqrt[n]{p(x)} = q(x)$

$\geq$

$>$

$\leq$

$<$

n dispari

Equivale sempre a

$p(x) = q(x)^n$

$\geq$

$>$ ...

1) $\sqrt[n]{p(x)} = q(x)$ n pari

equivale a:

$$\begin{cases} \cancel{p(x) \geq 0} \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) = q(x)^n \end{cases}$$

Es:

$$\sqrt{2x^2 - x - 27} = x - 3$$

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 27 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \underbrace{x^2 + 5x - 36 = 0} \end{cases}$$

$\cancel{x = -9}$ $\quad$ $x = 4$

2) $\sqrt[n]{p(x)} \leq q(x)$ n pari

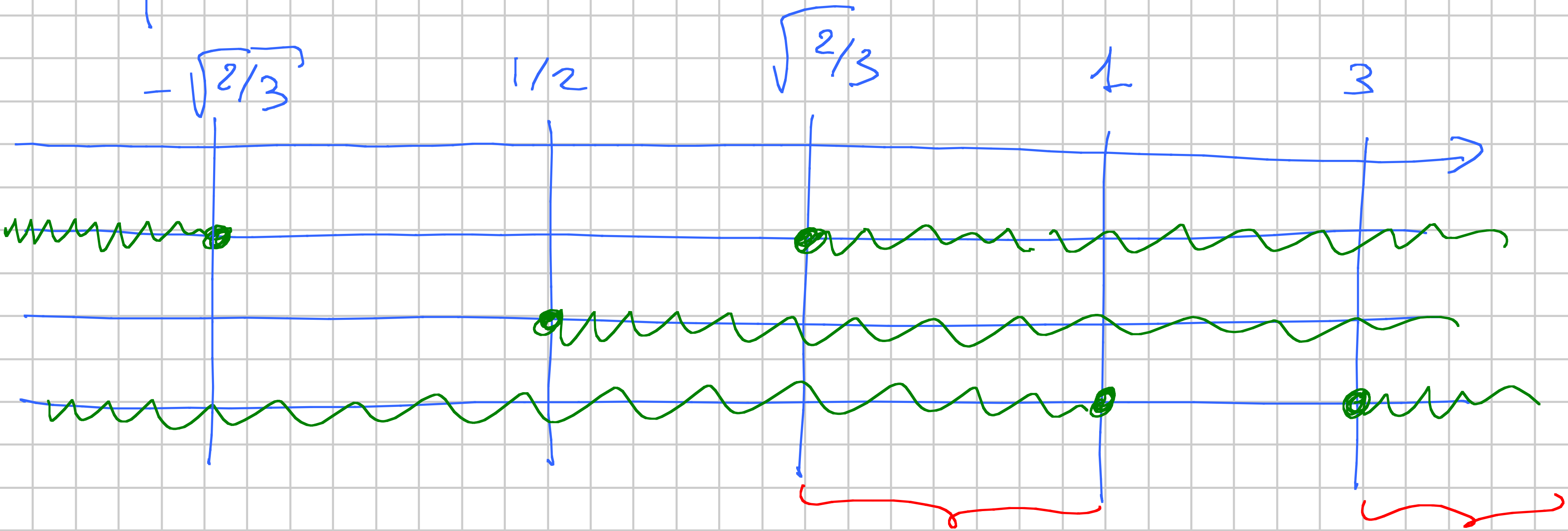
equivale a $\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) \leq q(x)^n \end{cases}$

Es: $\sqrt{3x^2-2} \leq 2x-1$

$$\begin{cases} 3x^2-2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 3x^2-2 \leq 4x^2-4x+1 \end{cases}$$

$x^2-4x+3 \geq 0$

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad o \quad x \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \\ x \geq 1/2 \\ x \leq 1 \quad o \quad x \geq 3 \end{cases}$$



Soluz. $\sqrt{2/3} \leq x \leq 1$ o $x \geq 3$

3) $\sqrt[n]{p(x)} \geq q(x)$

equivale a:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \leq 0 \end{cases}$$

oppure

n pari

$$\begin{cases} \cancel{p(x) \geq 0} \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq q(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-4} > x-1$$ equivale a:

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$ oppure $$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-4 > x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \text{ o } x \geq 2 \\ x < 1 \end{cases}$$ oppure $$\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x > 5 \end{cases}$$

$x \leq -2$ oppure $x > 5/2$

Definizione delle funzioni esponenziali.

Potenze di $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad a^{-\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}}$$

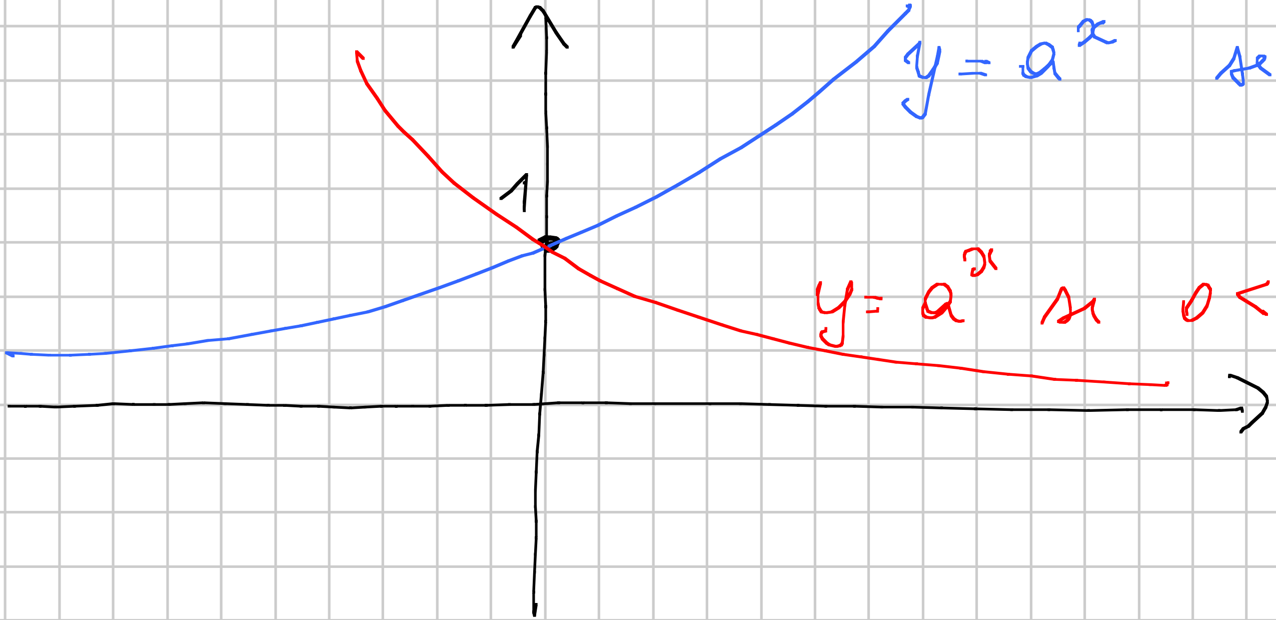
$$n \in \mathbb{N}$$

Pongo $a^{n/m} = \left(a^n\right)^{1/m} = \left(a^{1/m}\right)^n$;

in questo modo ho definito

$$a^x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

Fatto: il grafico della funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che manda x in a^x è: ($a > 0$, $a \neq 1$ fissato)



CRESCENTE

DECRESCENTE

<u>Fatto</u> : esiste una unica estensione "continua" di tale funzione su $\mathbb{R}$; cioè è possibile definire

$$a^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (a>0,\ a\neq 1 \text{ fissato})$$

<u>continua</u> : • è anch'essa crescente per $a>1$, decrescente per $0<a<1$

• il suo grafico si dispone senza staccare la penna

- per approssimare il valore di a^x si prende q che approssima x e si calcola a^q.

Es: $2^{\pi} = 2^{3.1415\ldots} \simeq 2^{3.1415}$

$= 2^{\frac{31415}{10000}} = \sqrt[10000]{2^{31415}}$.

PROPRIETA':

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

Att: a^{x^y} è ambigua senza parentesi:

$$(2^2)^3 = 4^3 = 2^6 = 64$$

$$2^{(2^3)} = 2^8 = 2^2 \cdot 2^6 = 256.$$