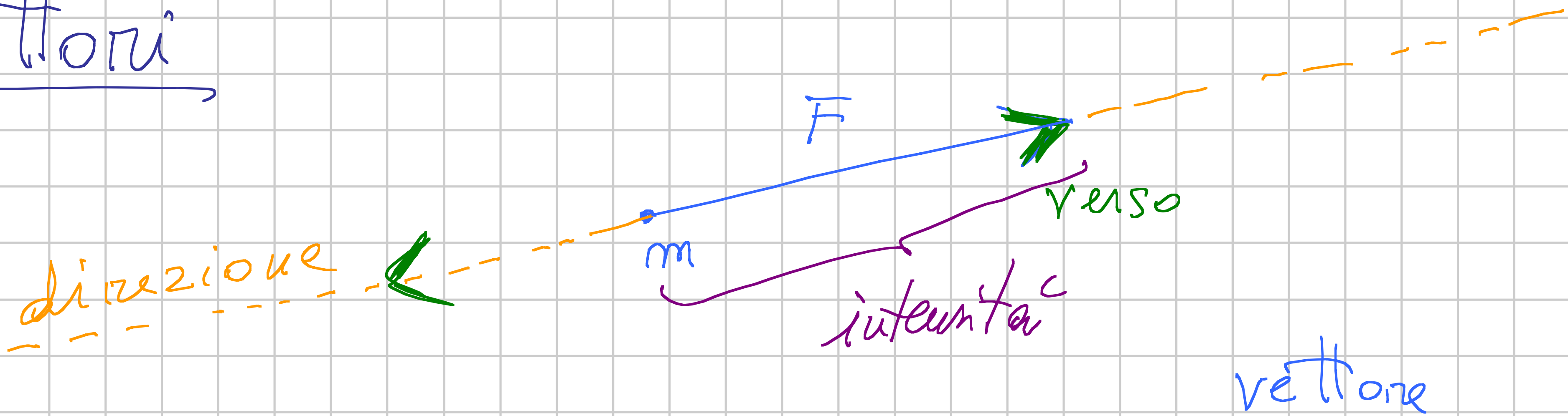
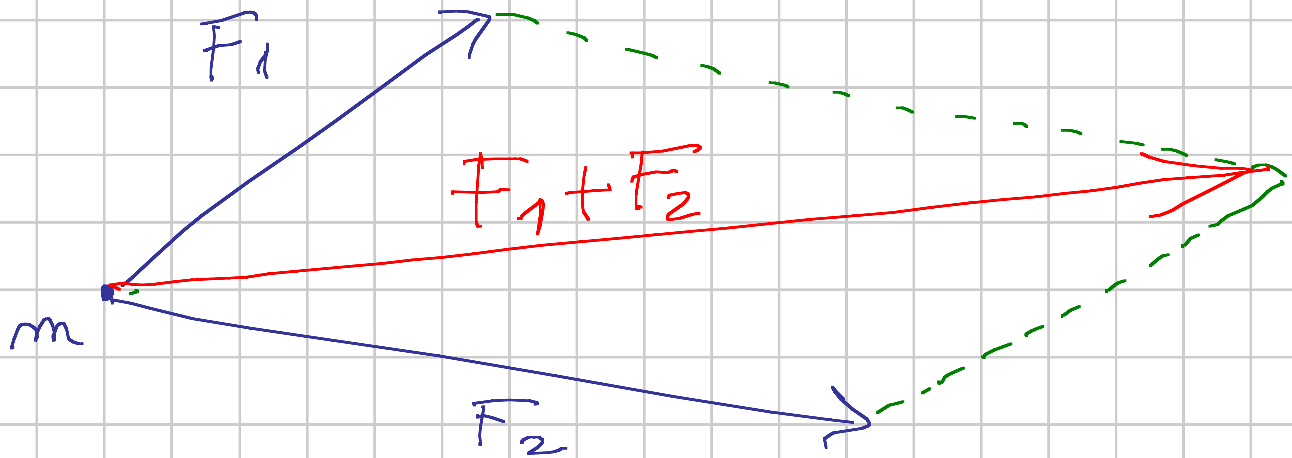
Matematica e statistica 14/11/17

21/11 - non c'è lezione

Vettori

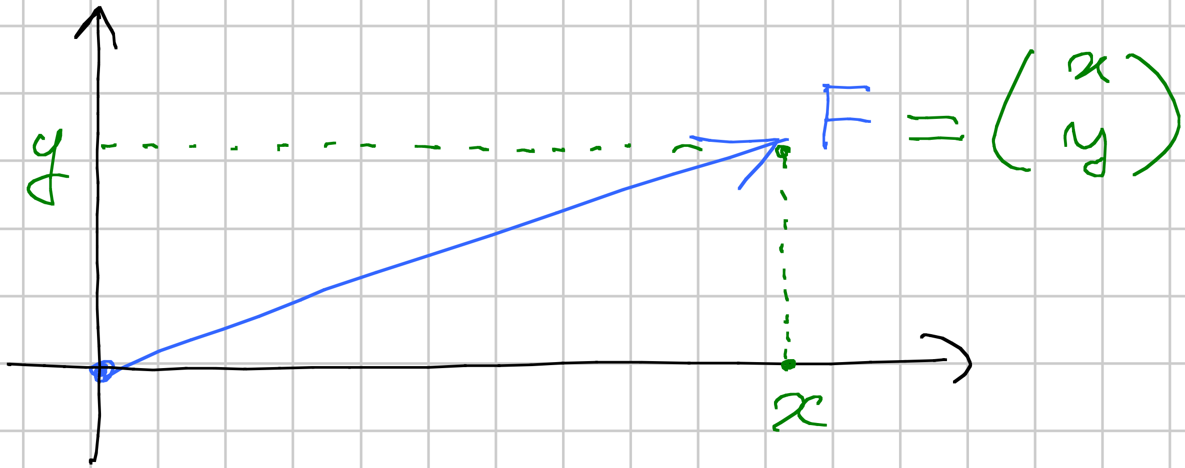


(sia nel piano sia nello spazio) .

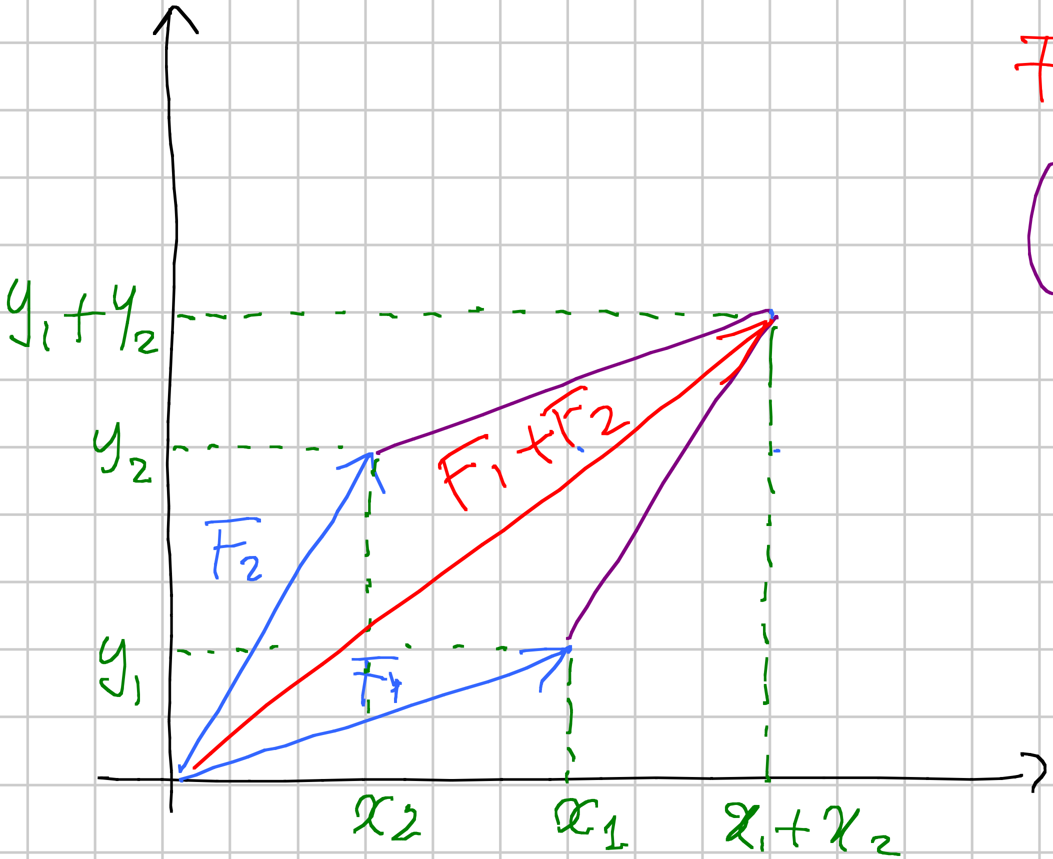


$F_1 + F_2$ = risultante di F_1 e F_2
(regola del parallelogramma).

Oss: se sul piano fisso un riferimento cartesiano con origine in m, le forze applicate a m corrispondono ai punti di $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ (vettori colonna)



Risultante

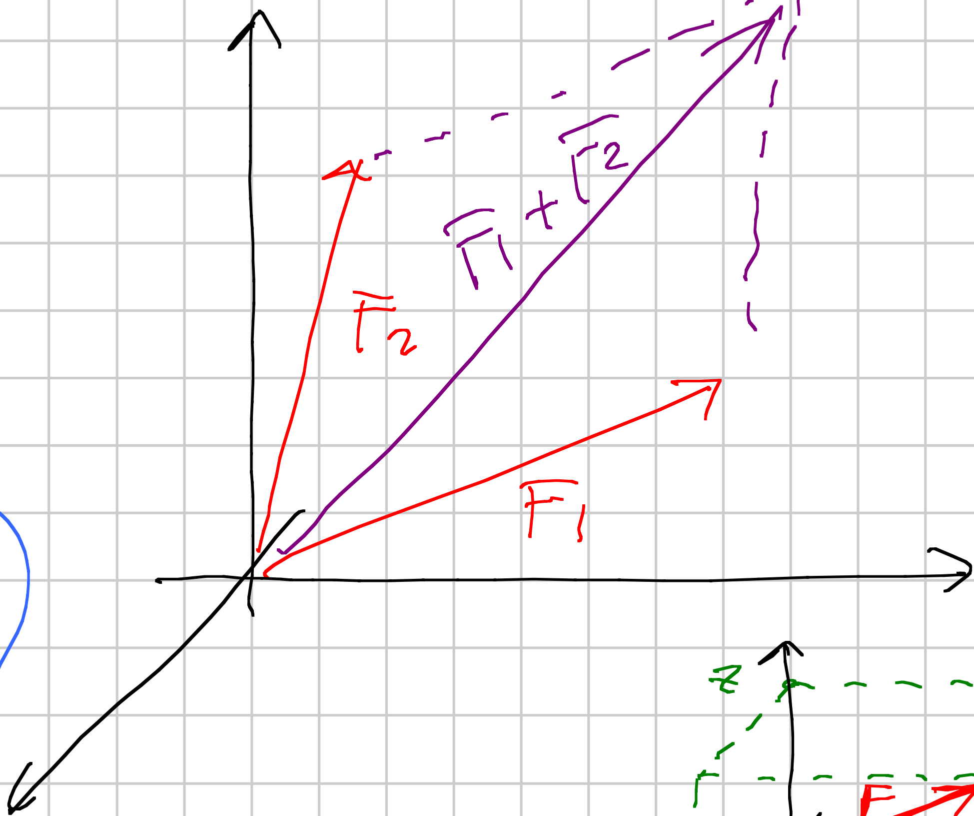


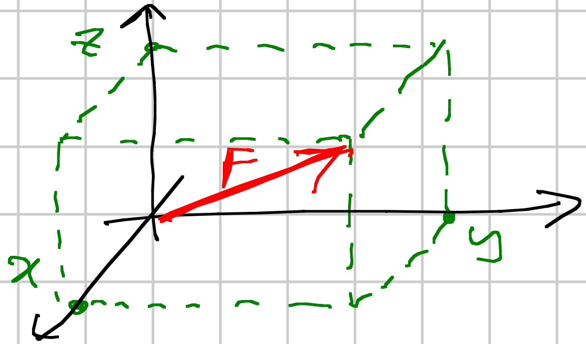
$F_1 + F_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$$

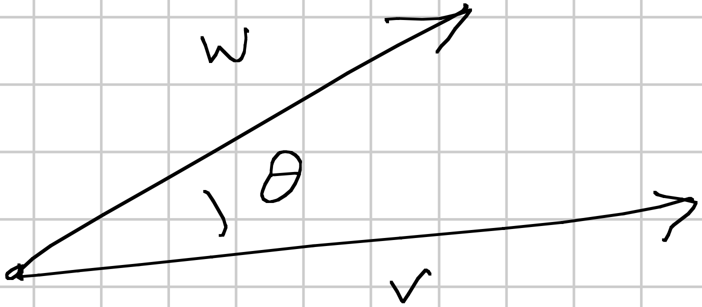
Stesso in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$



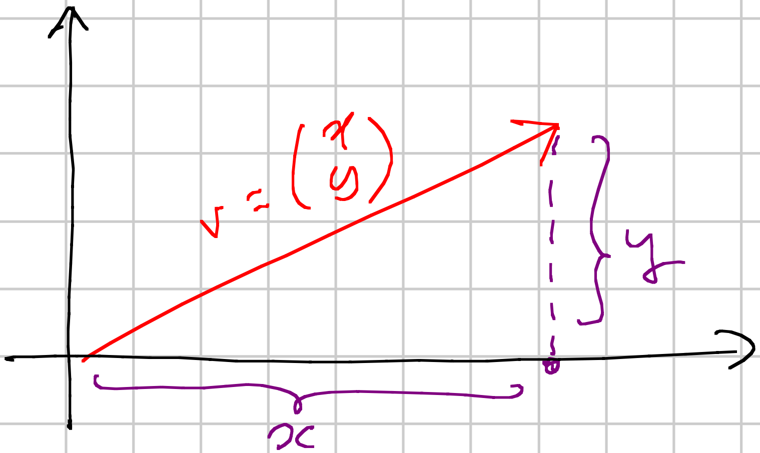


$$F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



angolo

lunghezza

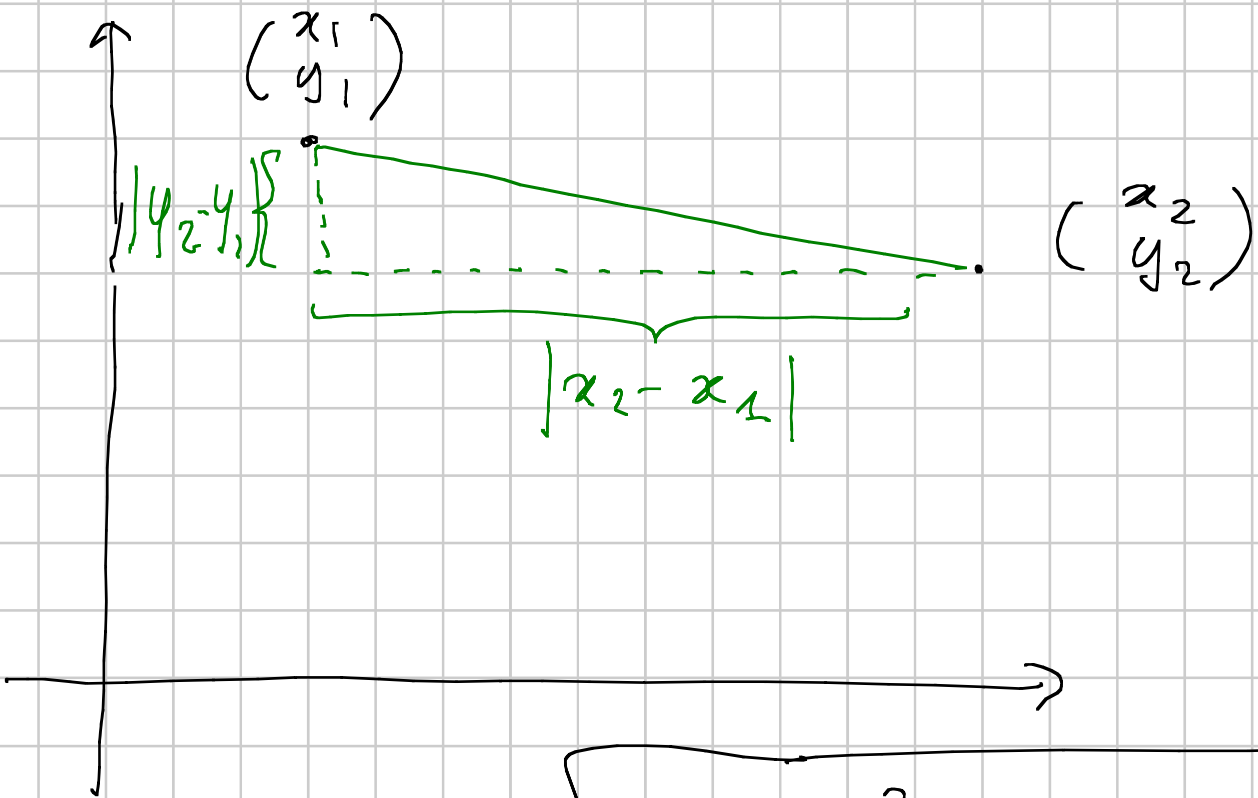


lunghezza $v = \sqrt{x^2+y^2}$;

lo chiamo $\|v\| = \sqrt{x^2+y^2}$

<u>norma</u>

distanza



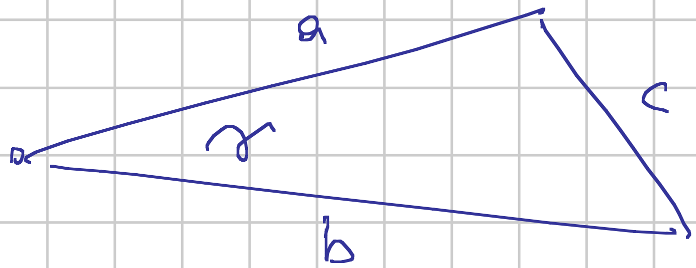
$\Rightarrow$ dist. tra $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \left\| \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\|$$

Anche in $\mathbb{R}^3$ $\quad \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

dist tra v e w $= \| w - v \|$ —

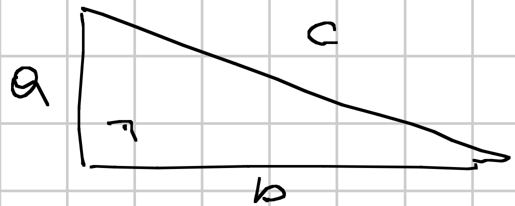
Angolo:



Teo di Carnot

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

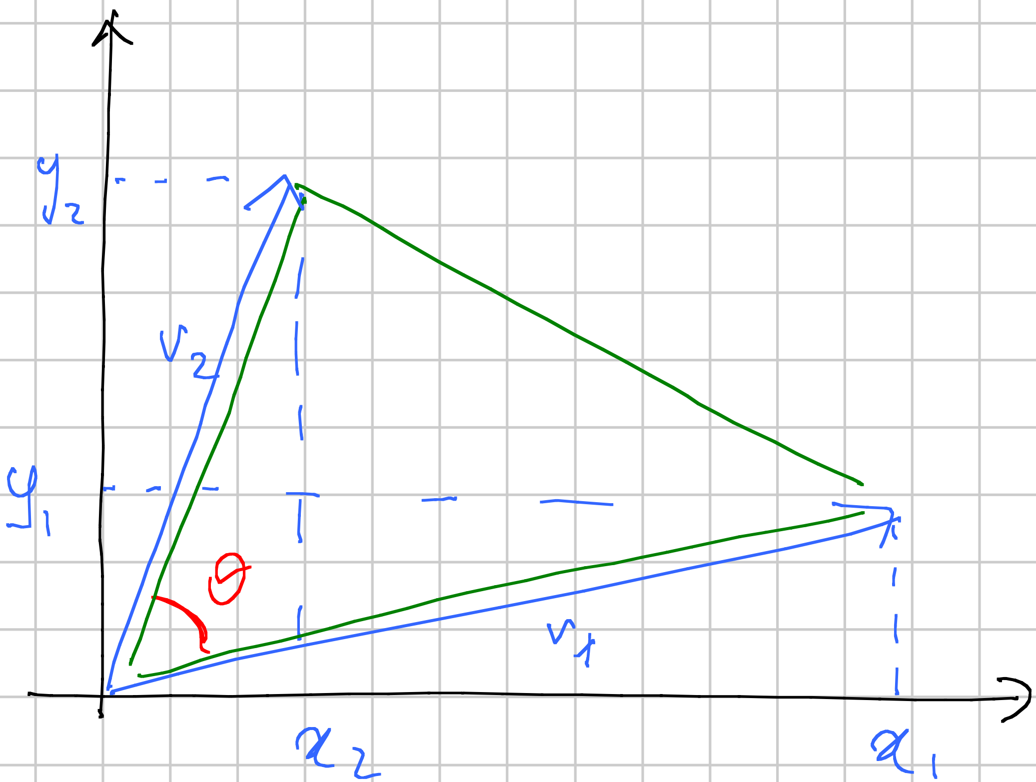
Oss: per γ retto, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ trovo



$$a^2+b^2=c^2 \quad \text{(Pitagora)}$$

(poiché $\cos(\pi/2) = 0$).

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



$$\cos(\theta) = \frac{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{\cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_2^2} - \cancel{x_2^2} + 2x_1x_2 - \cancel{x_1^2} - \cancel{y_2^2} + 2y_1y_2 - \cancel{y_1^2}}{2\sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\underbrace{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}_{\|v_1\|} \cdot \underbrace{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}_{\|v_2\|}} = \cos\left(\text{angolo tra } v_1 \text{ e } v_2\right)$$

Lo chiamo prodotto scalare tra v_1 e v_2:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Es: $\left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle = 7 \cdot (-5) + 4 \cdot 11$

$= 9$

Scoperto!

$$\cos(\text{angolo tra } v_1 \text{ e } v_2) = \frac{\langle v_1 \mid v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}.$$

Oss: $\|v\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x \cdot x + y \cdot y}$

$$= \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$$

Stesso in $\mathbb{R}^3$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\| v \| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$$

<u>Fatti</u>:

- $\text{length}(v) = \|v\|$
- $\text{dist}(v, w) = \|w - v\|$

• $\cos(\text{angolo tra } v \text{ e } w) = \dfrac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$.

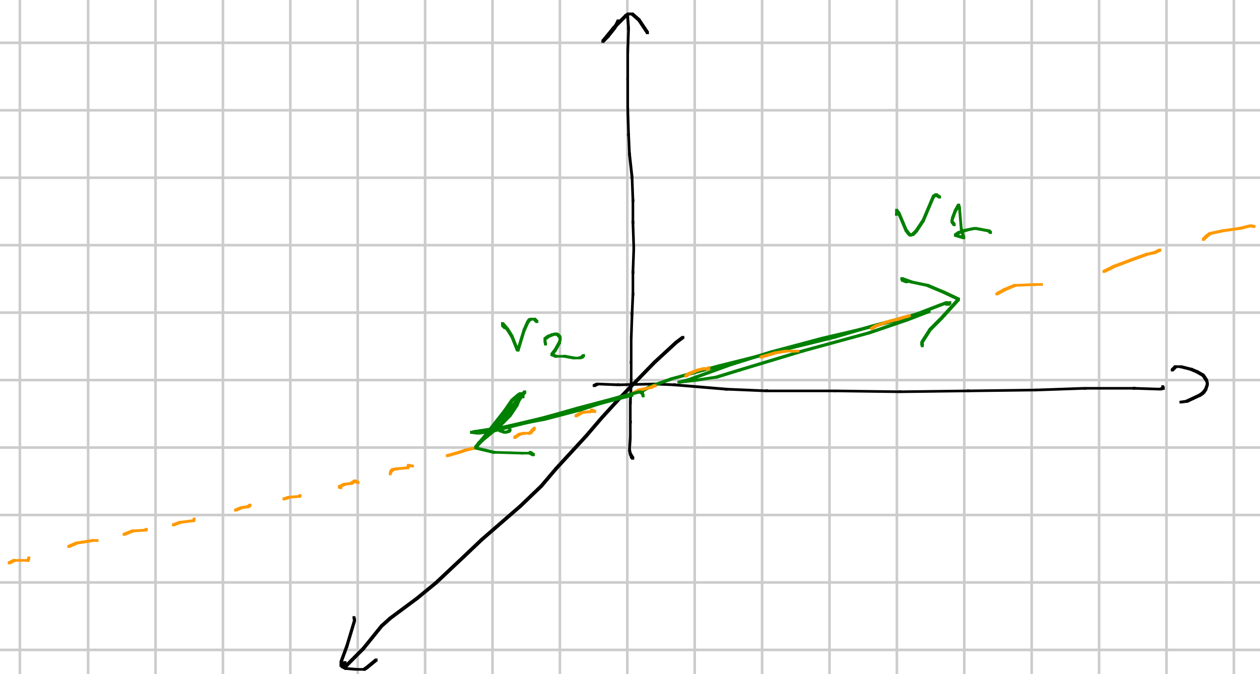
Es: l'angolo tra i vettori $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ è

$$\arccos\left(\frac{(-1)\cdot 2 + 4\cdot(-7) + 5\cdot 3}{\sqrt{(-1)^2+4^2+5^2} \cdot \sqrt{2^2+(-7)^2+3^2}} \right)$$

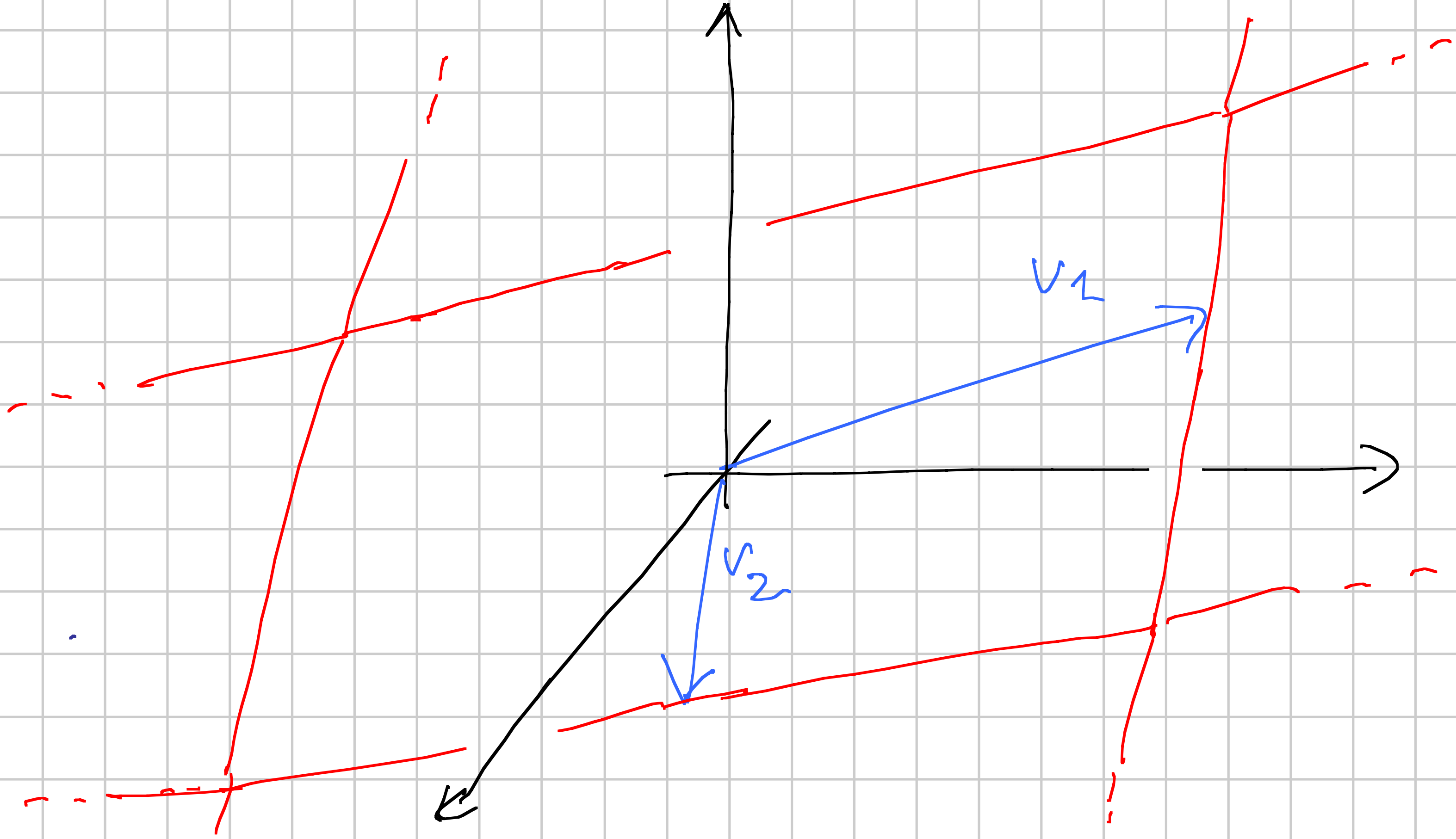
$$= \arccos\left(- \frac{15}{\sqrt{42 \cdot 64}} \right) = \dots$$

Supponiamo di avere $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$.

Due casi: • v_1, v_2 giacciono sulla stessa retta:



- altrimenti determinano un unico piano che li contiene tutti e due:



v_1
v_2

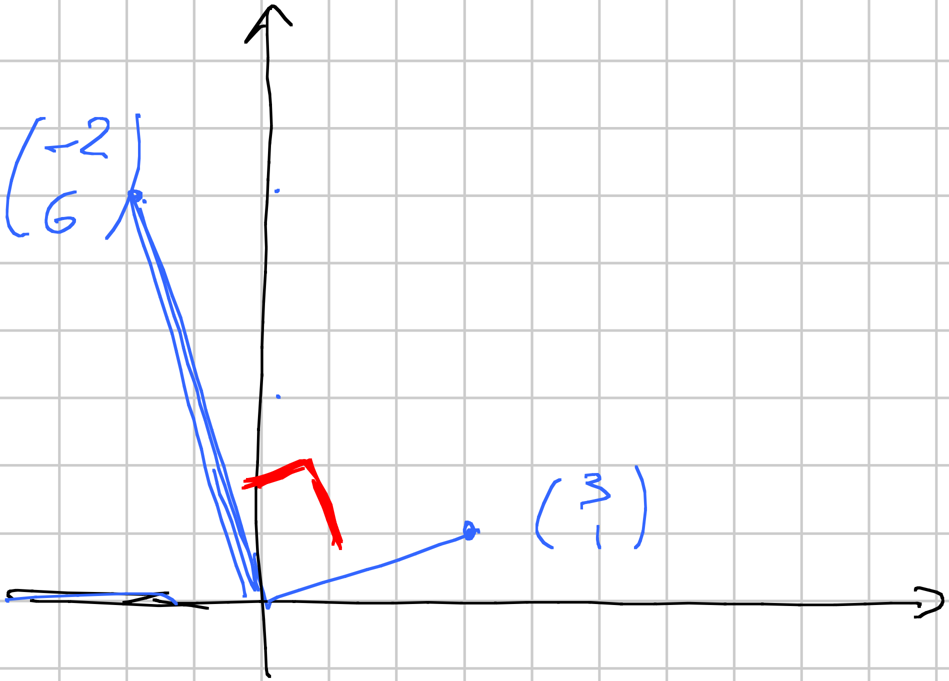
Q : come trovare la direzione ortogonale (perpendicolare) a tale piano?

Oss: due vettori v_1, v_2 sono perpendicolari se formano un angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ cioè tale che $\cos\theta = 0$,

ma $\cos\theta = \dfrac{\langle v_1 | v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$; dunque

$$v_1 \perp v_2 \iff \langle v_1 | v_2 \rangle = 0$$

Es:

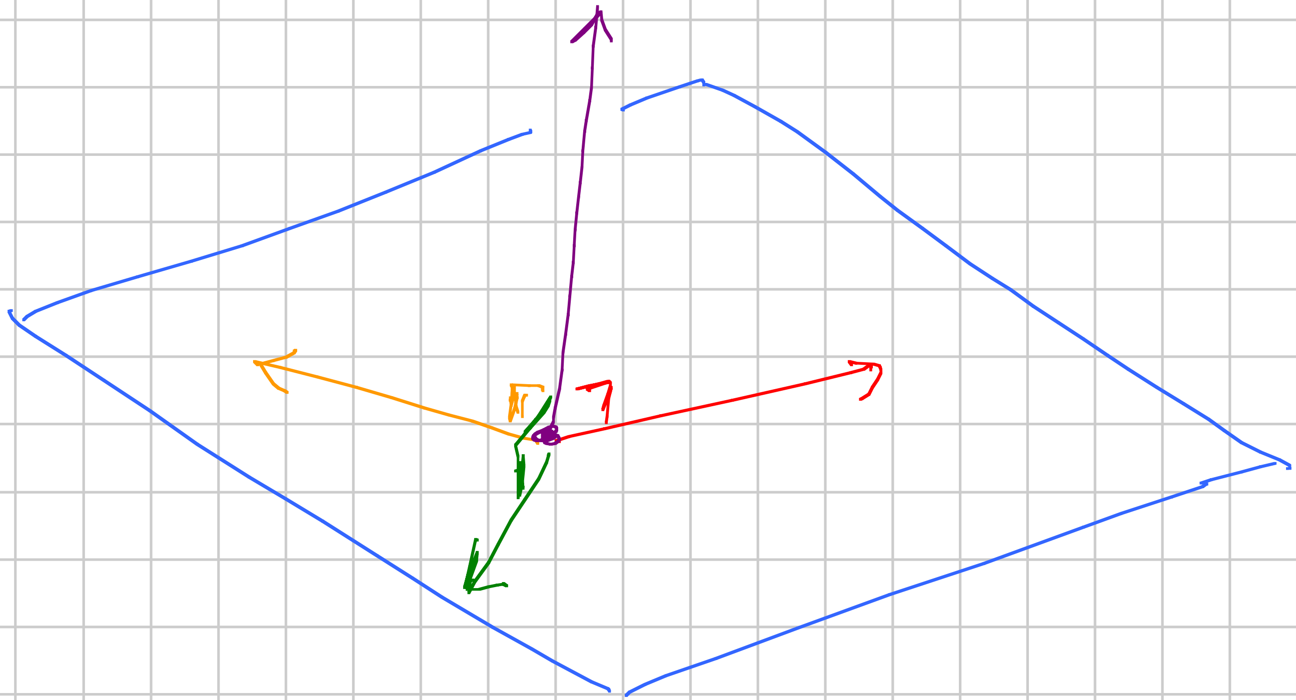


$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 6$$

$$= 0$$

<u>Oss</u>: in $\mathbb{R}^3$ un vettore u è ortogonale a un piano se è ortog. a tutti i vettori sul piano:



Se il piano è quello determinato da due vettori v_1, v_2 che non stanno sulla stessa retta, basta chiedere che u sia $\perp$ a v_1, v_2.

Def: chiamo prodotto vettoriale dei vettori

$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ il vettore:

$$V_1 \times V_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - z_1 x_2) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

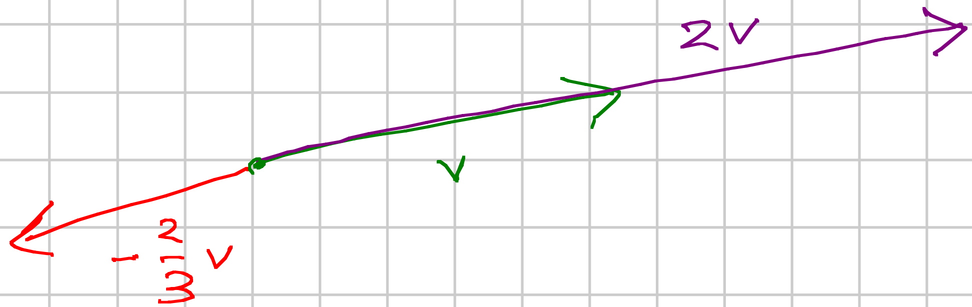
<u>Es:</u>

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 7 - 5 \cdot 1 \\ -(4 \cdot 7 - 5 \cdot (-2)) \\ 4 \cdot 1 - (-3) \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -26 \\ -38 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Altre operazioni sui vettori di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (oltre alla somma): prodotto tra un numero k e un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$k \cdot v = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \\ k \cdot z \end{pmatrix}$$



Oss: due vettori sono sulle stesse rette se e solo se sono proporzionali fra loro (uno dei due è k· altro)

Fatti: •) Se v_1, v_2 sono proporzionali allora $v_1 \times v_2 = 0$

•) Se non sono proporzionali, $v_1 \times v_2$

è un vettore $\neq 0$ perpendicolare al piano su cui giacciono v_1 e v_2

<u>Es</u>: verifico che $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -38 \\ -2 \end{pmatrix}$

è perpendicolare al piano determinato dai due, cioè che è perpendicolare ad entrambi.

Osservo che il vettore trovato è $-2\begin{pmatrix}13\\19\\7\end{pmatrix}$

e che l'angolo tra due vettori non cambia

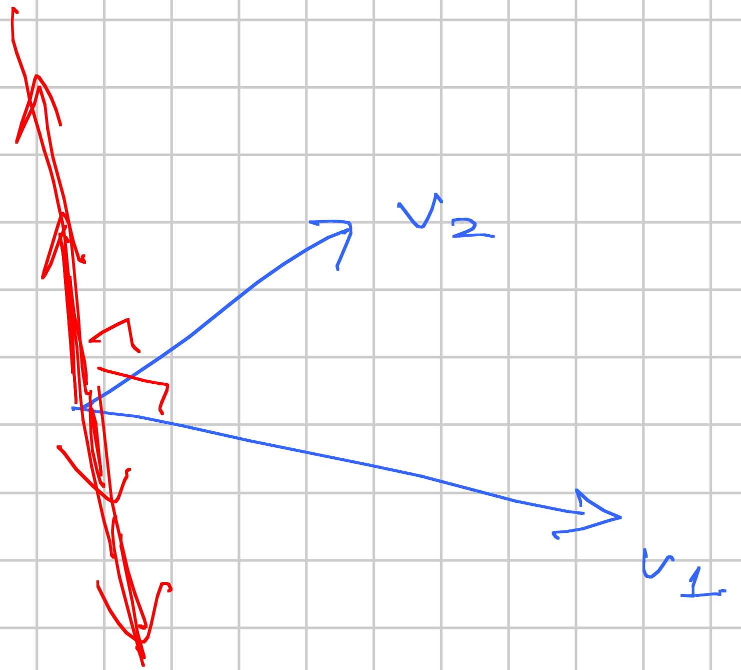
se moltiplico uno dei due per una costante;

quindi basta vedere che $\begin{pmatrix}13\\19\\7\end{pmatrix}$ è $\perp$ ai due:

$$\left\langle \begin{pmatrix}13\\19\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix} \right\rangle = 52-57+5=0 \quad \checkmark$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}13\\19\\7\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix} \right\rangle = -26+19+7=0 \quad \checkmark$$

Oss: di vettori ortogonali al piano determinato da v_1, v_2 ce ne sono infiniti (una retta):



Q: quale di tali vettori è $v_1 \times v_2$?

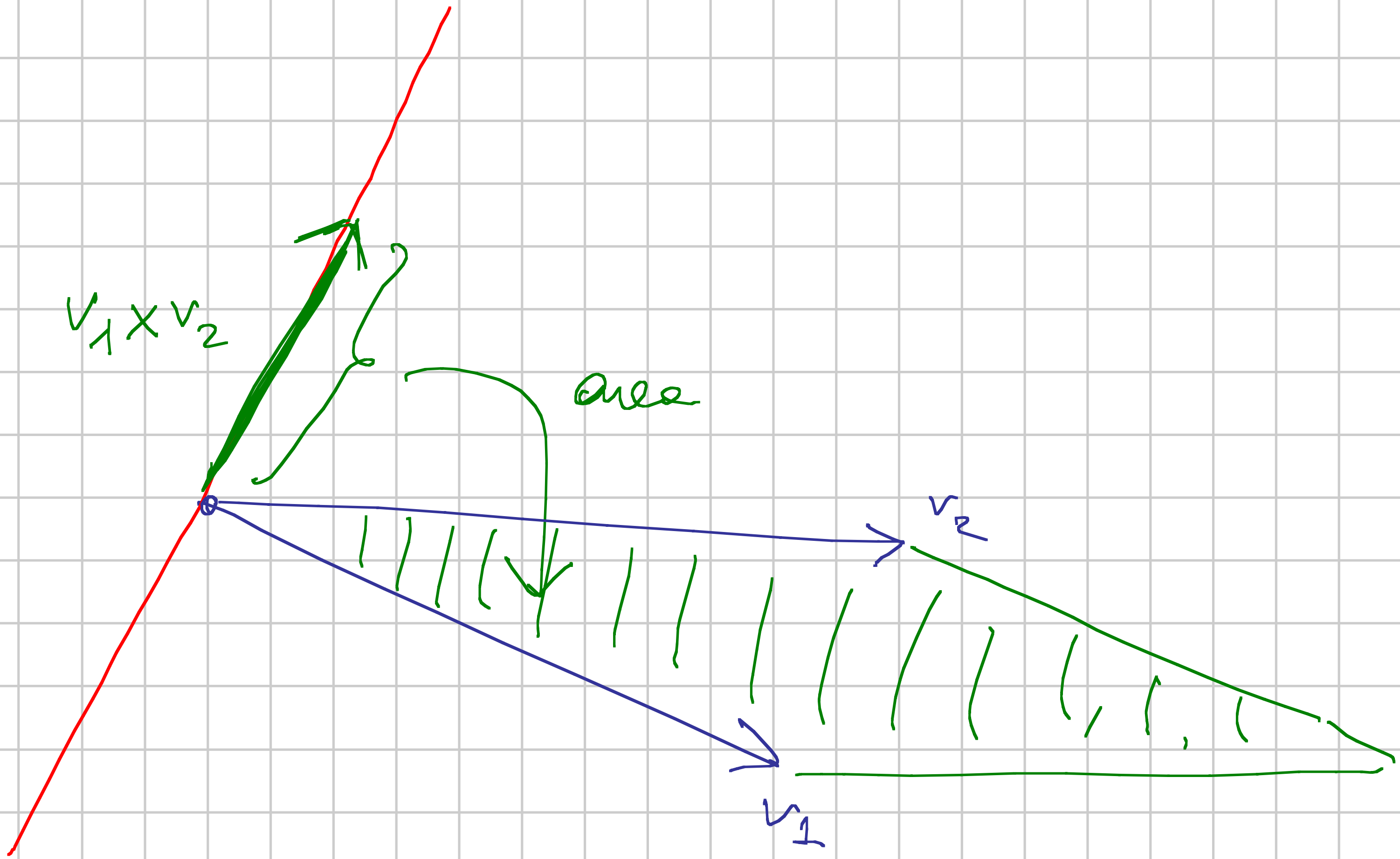
A: intensità = area del parallelogramma che ha per lati v_1, v_2

verso = ottenuto con regola mano destra:

pollice — v_1

indice — v_2

$v_1 \times v_2$ — medio



$v_1 \times v_2$
area
v_2
v_1

Foglio es 7/11/17

③ $$2\left(1-\cos(\sqrt{x})\right) = 1-\cos(2\sqrt{x})$$

$$2-2\cos(\sqrt{x}) = 1-\left(2\cos^2(\sqrt{x})-1\right)$$

$$2-2\cos(\sqrt{x}) = 2-2\cos^2(\sqrt{x})$$

$$\cos(\sqrt{x}) = \cos^2(\sqrt{x})$$

$$t = \cos(\sqrt{x})$$

$$t = t^2$$

$t = 0 \longrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \;,\; k \in \mathbb{N} \rightarrow x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2, k \in \mathbb{N}$

$t = 1 \longrightarrow \sqrt{x} = 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{N} \longrightarrow x = (2k\pi)^2, \; k \in \mathbb{N}$

(8) $$tg^2(2x) = cotg^2(x)$$

$$\frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)} = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$\frac{4\sin^2(x)\cos^2(x)}{\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)^2} = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

vale se $\cos^2(x) = 0$ cioè se $\cos(x) = 0$

cioè $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$; soluz accettabile ; oppure

$$\frac{4\sin^2(x)}{(1-2\sin^2(x))^2} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

Pongo $t = \sin^2(x)$:

$$\frac{4t}{(1-2t)^2} = \frac{1}{t}$$

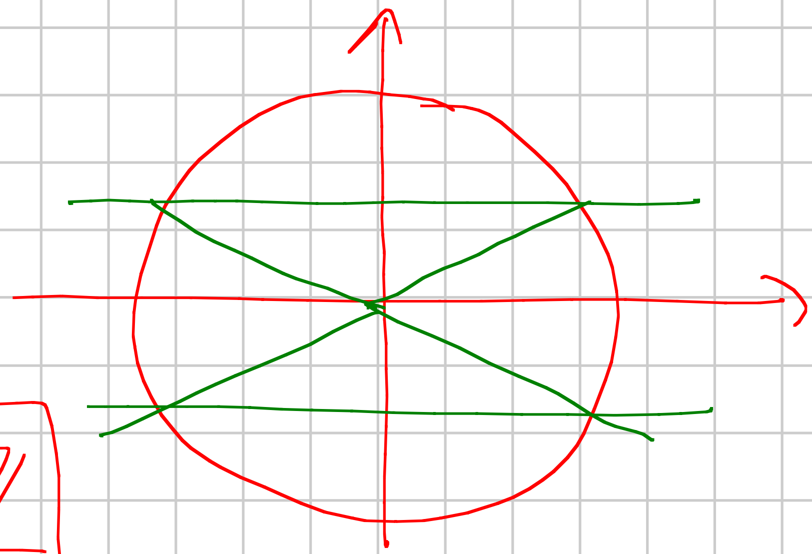
$$\cancel{4t^2} = 1 - 4t + \cancel{4t^2}$$

$$t = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(x) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

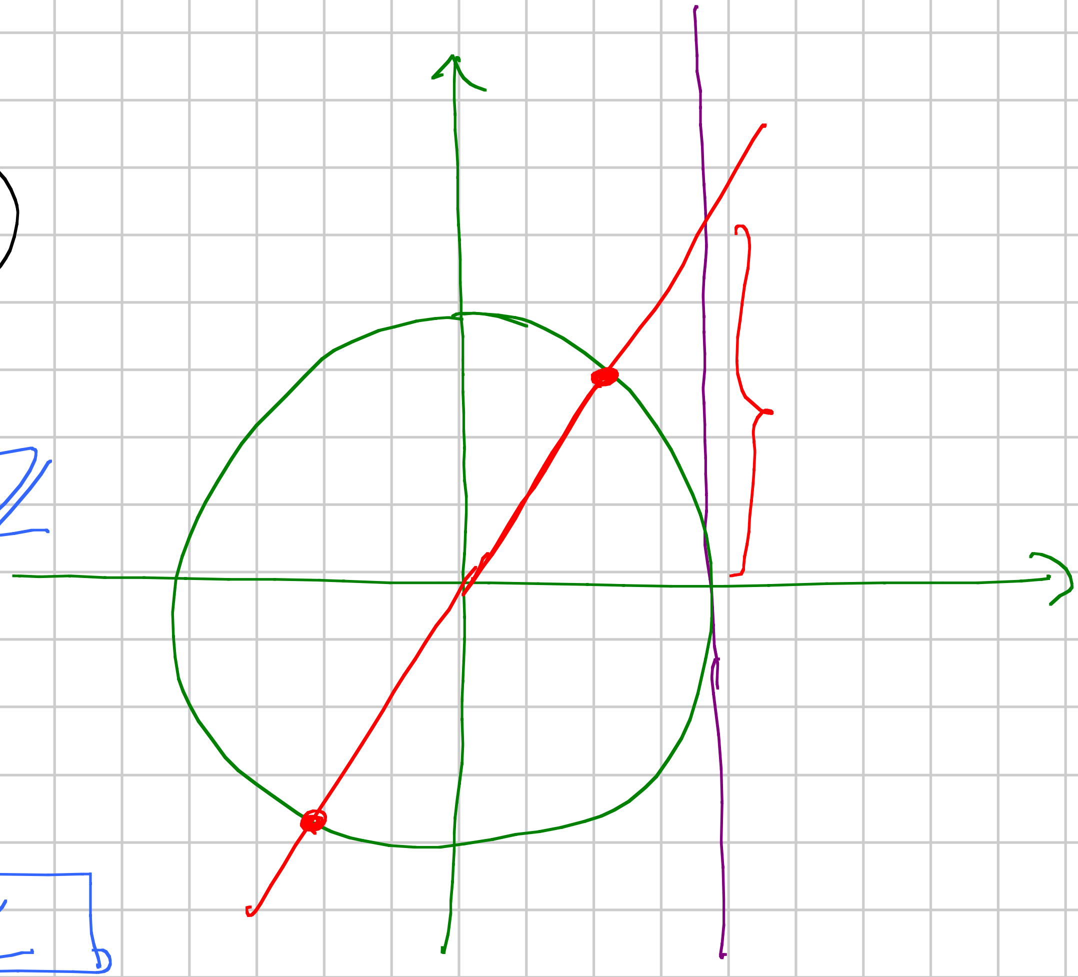


10 $\quad tg\left(\frac{x}{2}\right) = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{x}{2} = x - \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

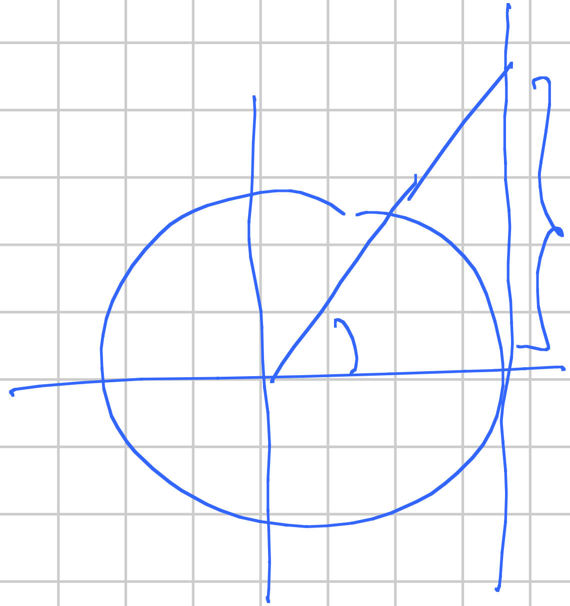
$$\boxed{x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$$



13

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(x)-\cos^2(x)} = 2\,tg\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{2\sin(x)\cos(x)}{(1-\cos(x))\cdot\cos(x)} = 2\sqrt{3}$$



escludo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

$$\sin x = \sqrt{3}\,(1-\cos(x))$$

Poupo $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$; $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$

$$2t = \sqrt{3}\left(1+t^2-1+t^2\right)$$

$$2t = 2\sqrt{3}t^2$$

$$t = \sqrt{3}\,t^2$$

$$t = 0 \longrightarrow tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \longrightarrow \frac{x}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \longrightarrow \boxed{x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow tg\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$