

Matematica e statistica 7/11/17

Domani inizio 14:15 - (Fine 15:45)

LIMITI

ICR intervallo (aperto, semiaperto, chiuso,
semiretta, retta)

$x_0 \in I$ f funzione definita su I
escluso eventualmente x_0

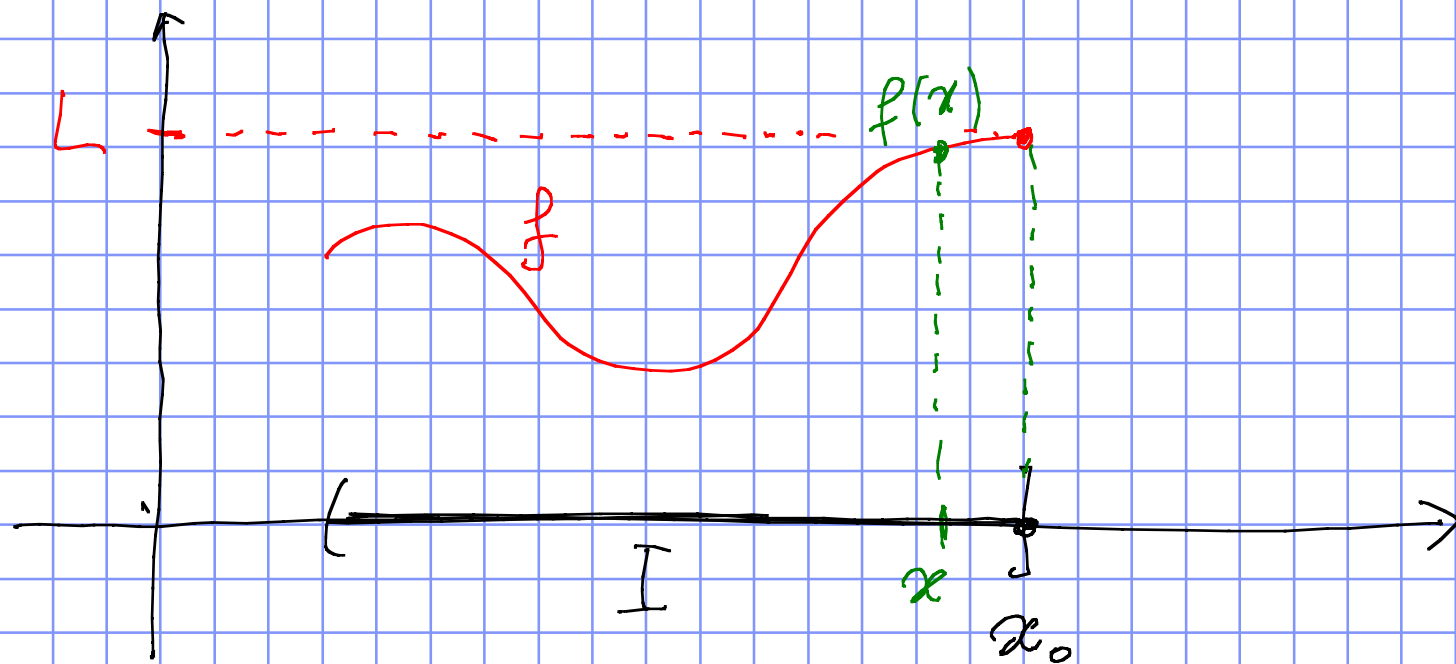
Def: se $L \in \mathbb{R}$ diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

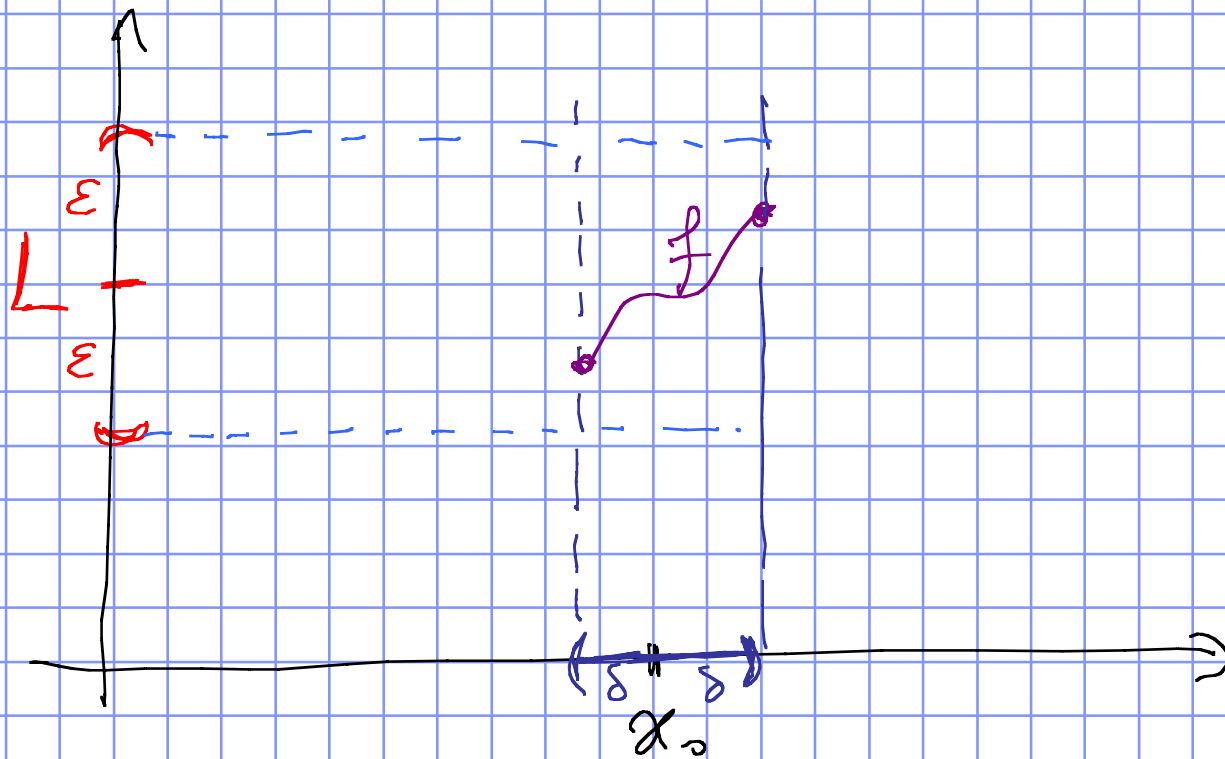
"il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ vale L "

se

- per x che si avvicina a x_0 , si ha che $f(x)$ si avvicina a L

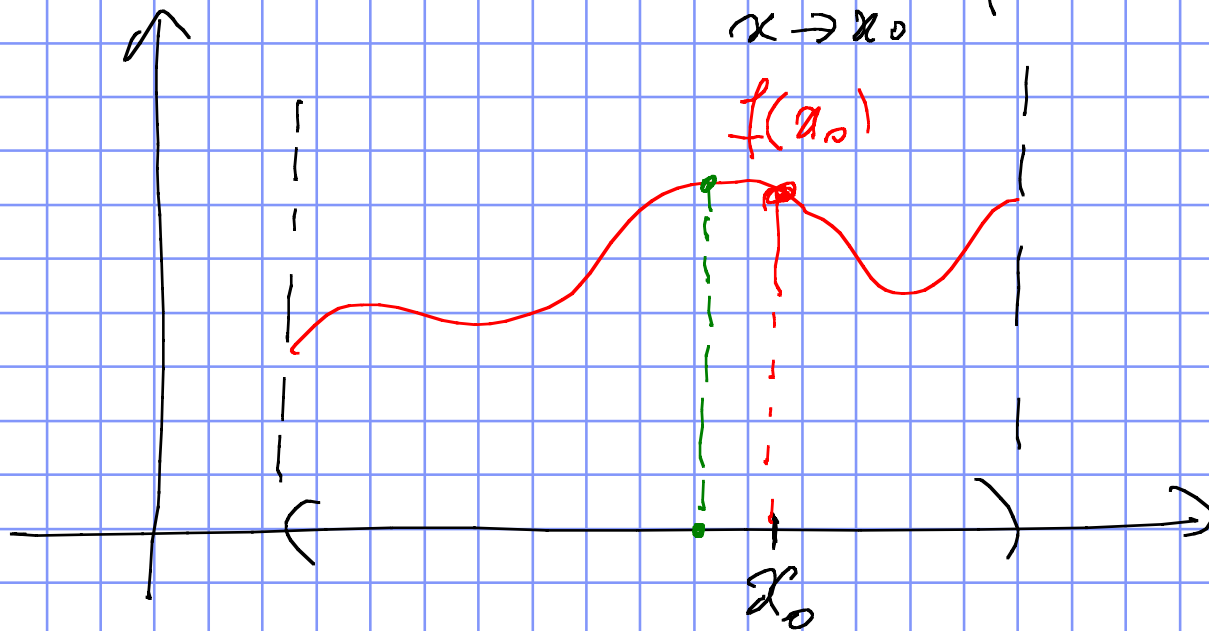


Formulazione: scelto qualsiasi $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$
 t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon$ per $|x - x_0| < \delta$



Cioè, fissato
 quanto vicino voglio
 che $f(x)$ sia a L ,
 ciò accade purché
 x sia sufficientemente
 vicino a x_0 .

CASO FACILE: se f è definita anche in x_0
e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



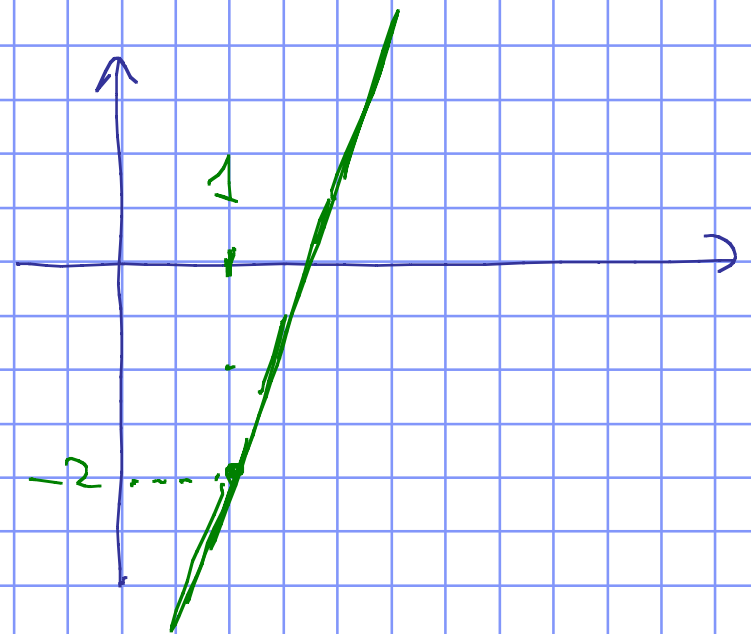
Fatto: ciò è vero per tutte le funzioni viste finora (polinomi, radici, frazioni, $\exp$, $\log$, $\sin/\cos/\tan$) perché f sia definita in x_0 .

Esempio: $f(x) = 3x - 5$

$$x_0 = 1$$

$$f(x_0) = -2$$

Verifico che $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 5) = -2$:



fissato $\varepsilon > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c.

$$|(3x-5) - (-2)| < \varepsilon \quad \text{per } |x-1| < \delta$$

cioè

$$|3(x-1)| < \varepsilon \quad \text{pu} \quad |x-1| < \delta$$

Basta scegliere $\delta = \varepsilon/3$
in fatti se $|x-1| < \varepsilon/3$ allora

$$|3(x-1)| < \varepsilon -$$

————— 0 —————

Fatto: il limite non
sempre esiste.

① $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $x_0 = 0$



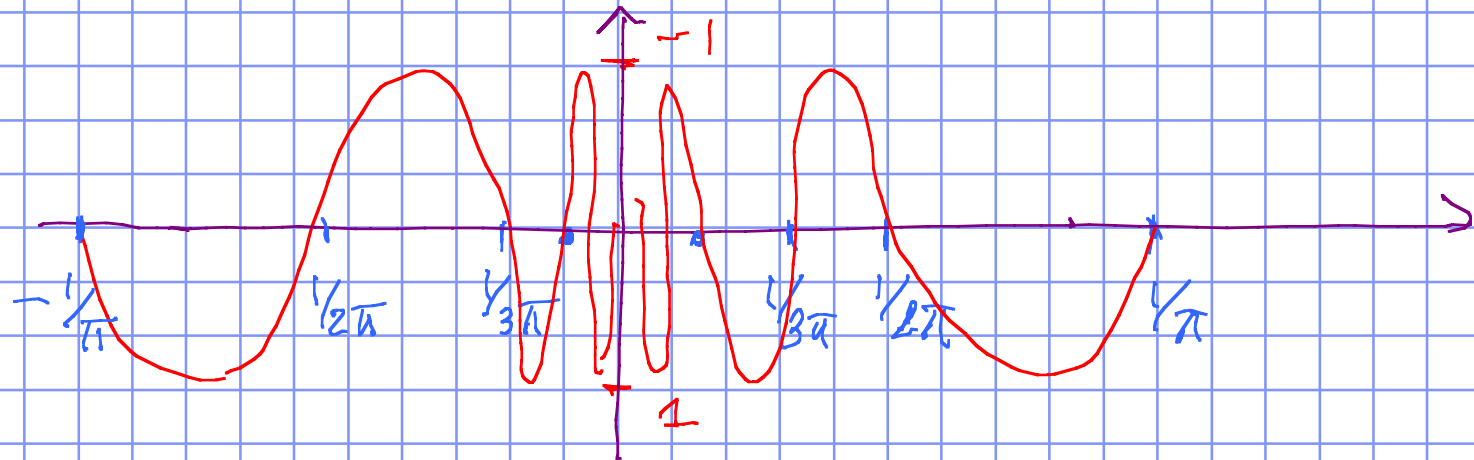
limite destro o sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

se $f(x)$ si avvicina a L per
 x che tende a x_0 da destra

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad \text{--- sinistra.}$$

② $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $x=0$



$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ non esiste

^o
Limiti $\pm \infty$ e/o in $\pm \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

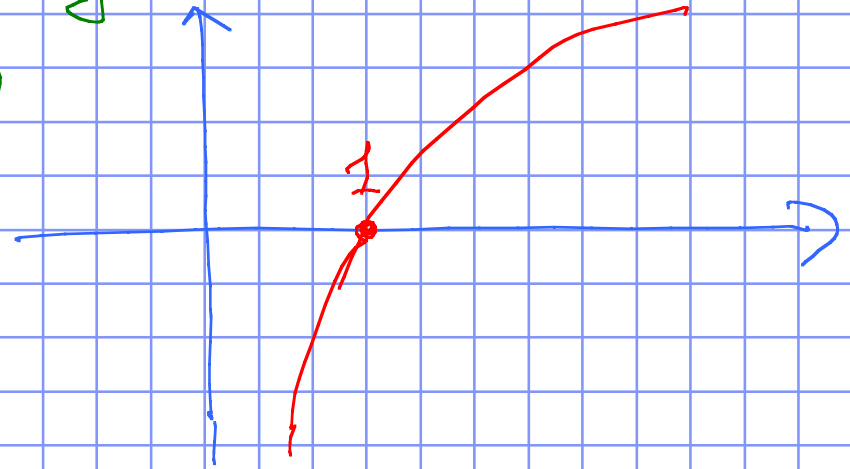
per x che si avvicina a x_0

ho che $f(x)$ diventa positivo
molto grande.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

negativo molto grande in
valore assoluto.

Es: $f(x) = \log(x)$ $I = (0, +\infty)$
 $x_0 = 0$

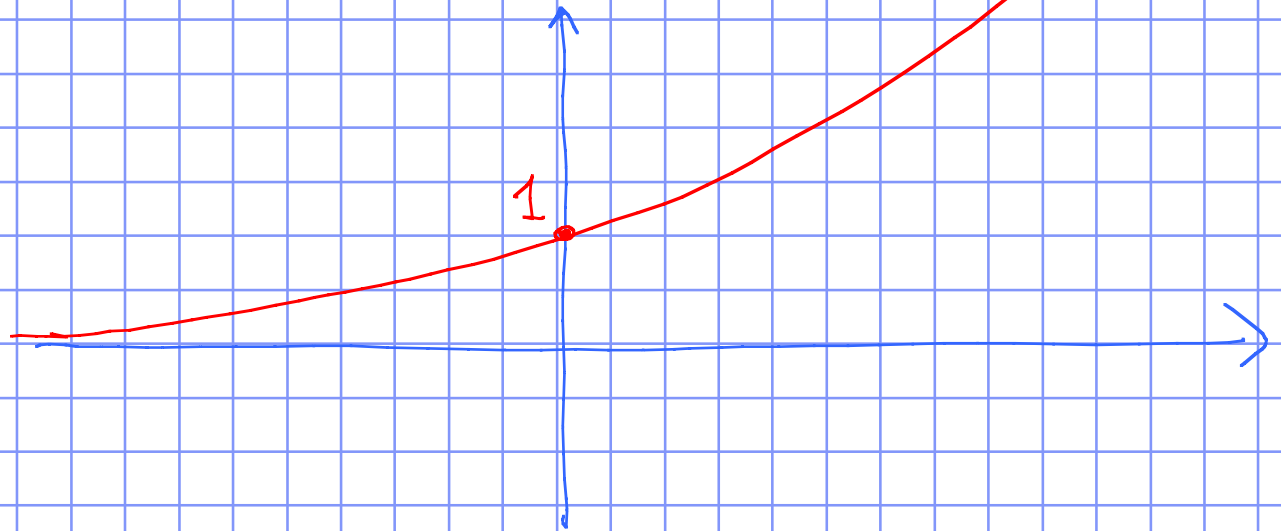



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ se per x
positivo molto grande, $f(x)$

in arvicine a L

Es: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty$$

$$\text{Es: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Fatto: il limite di una somma,
prodotto o esponenziale o ...
e le somme, il prodotto,

esponentiale ... dei limiti e
meno che non intervengano
«forme indeterminate»

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} ((3x-5) + \cos(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} (3x-5) + \lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x) \\ &= (3\pi-5) + (-1) = 3\pi-6 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 7} (4x-11)^{x^2-2x} \neq 17^{35} \text{ ist}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty - \infty?$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 - x) = +\infty$$

Autre forme indéterminée :

$$0 \cdot (\pm \infty) \quad 1^{+\infty} \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

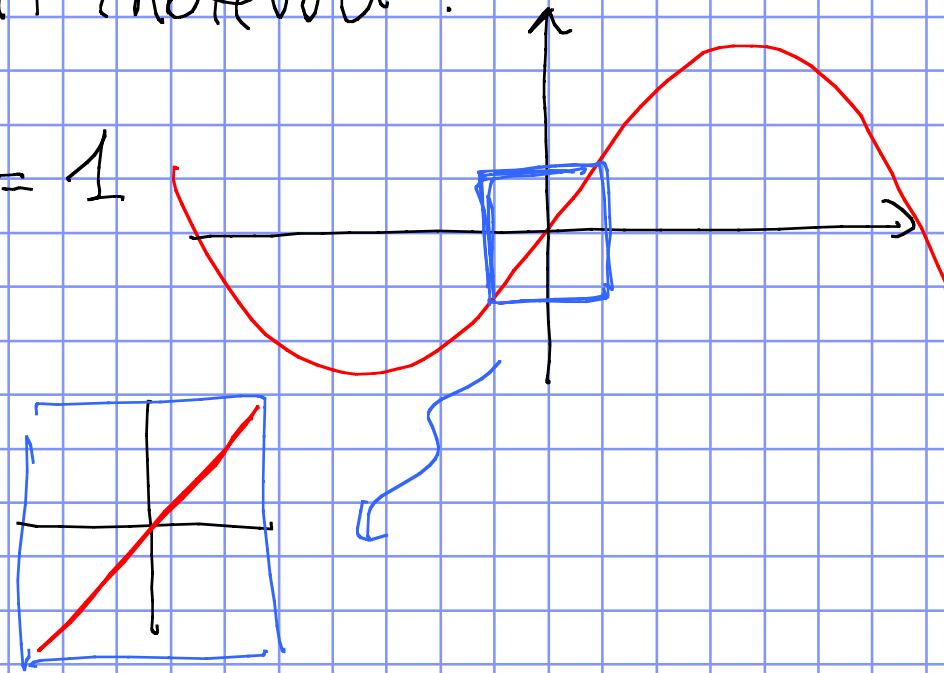
Non indéterminée : $\frac{L}{\infty} = 0$

$$0 \cdot L = 0$$

$$\frac{\pm \infty}{L} = \pm \infty$$

Alcuni limiti notevoli:

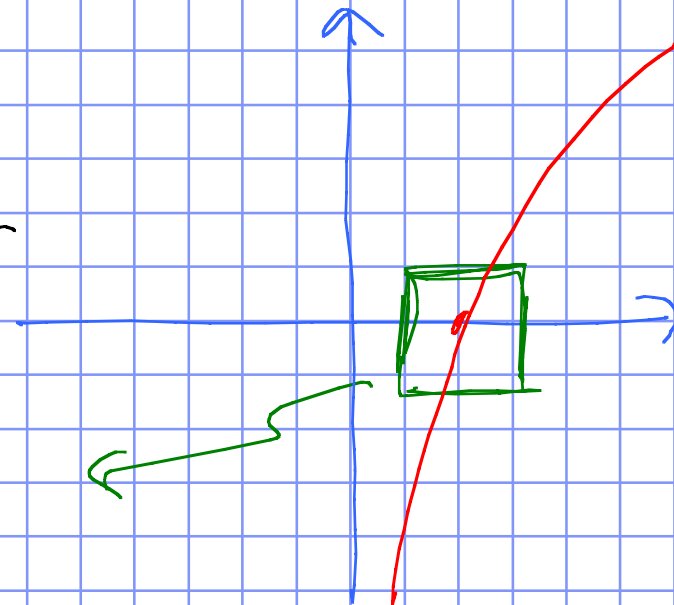
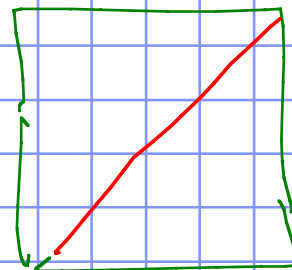
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

"exp vince sempre contro le
potenze di x , mentre il log
perde sempre";

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^{1000}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot x^{571} = 0$$

Diagram illustrating the limit: A red squiggly arrow points from $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ down to 0, and another red squiggly arrow points from x^{571} down to $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \cdot x^3 = 0$$

Diagram illustrating the limit: A red squiggly arrow points from $\ln(x)$ down to $-\infty$, and another red squiggly arrow points from x^3 down to 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$