

Geometria 26/4/18

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) &= \mathbb{P}(\mathbb{R}^{m+1}) = (\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}) / \sim \\ &= \text{l'insieme delle rette per } 0 \text{ in } \mathbb{R}^{m+1} \\ &= \mathbb{R}^m \cup \underbrace{\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{R})}_{\substack{\text{punti all'infinito} \\ = \text{direzioni delle rette di } \mathbb{R}^m}}\end{aligned}$$

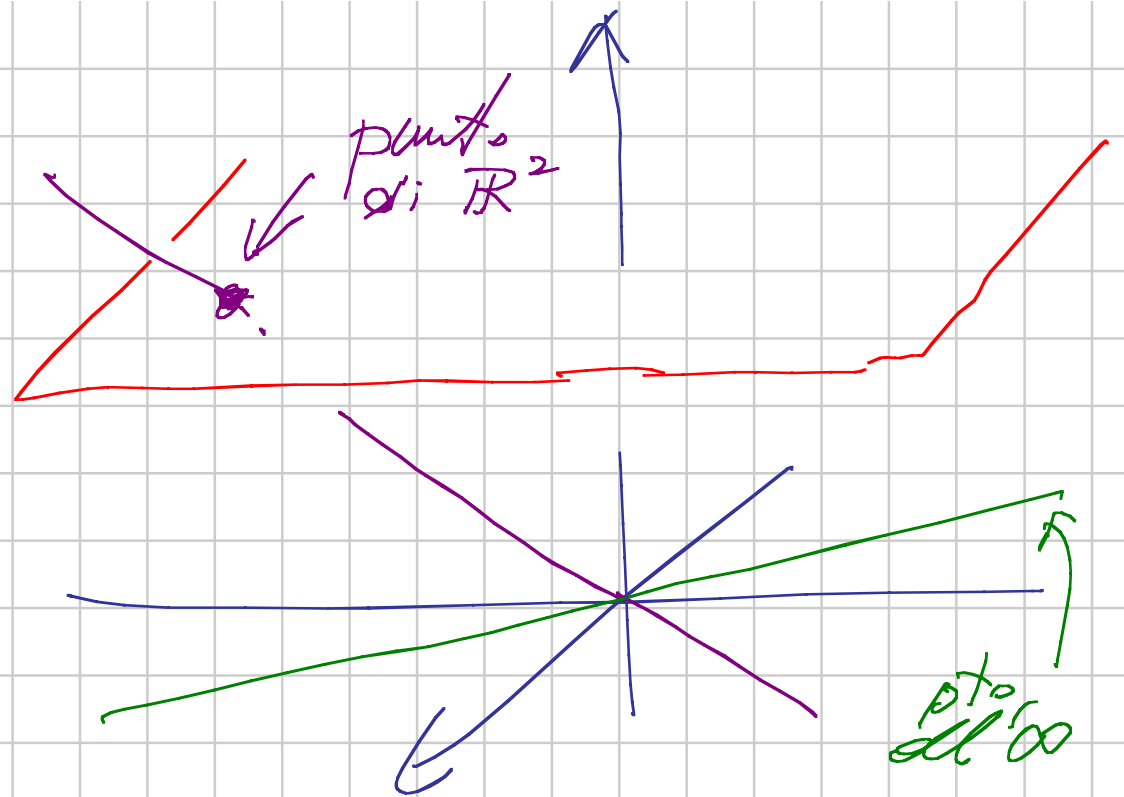
$x \sim \lambda \cdot x$

Indico la classe di equivalenza di $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ con
 $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ *coordinate omogenee*

Es: $[9 : -15 : 6] = [-6 : 10 : -4] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Def: chiamo sottospazio $\overset{X}{\checkmark}$ proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
l'immagine in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di $W \setminus \{0\}$ dove W
è un stsp. di $\mathbb{R}^{n+1}$ $\left(\begin{array}{l} \dim W = k \geq 1; \\ \dim X = k-1 \end{array} \right)$

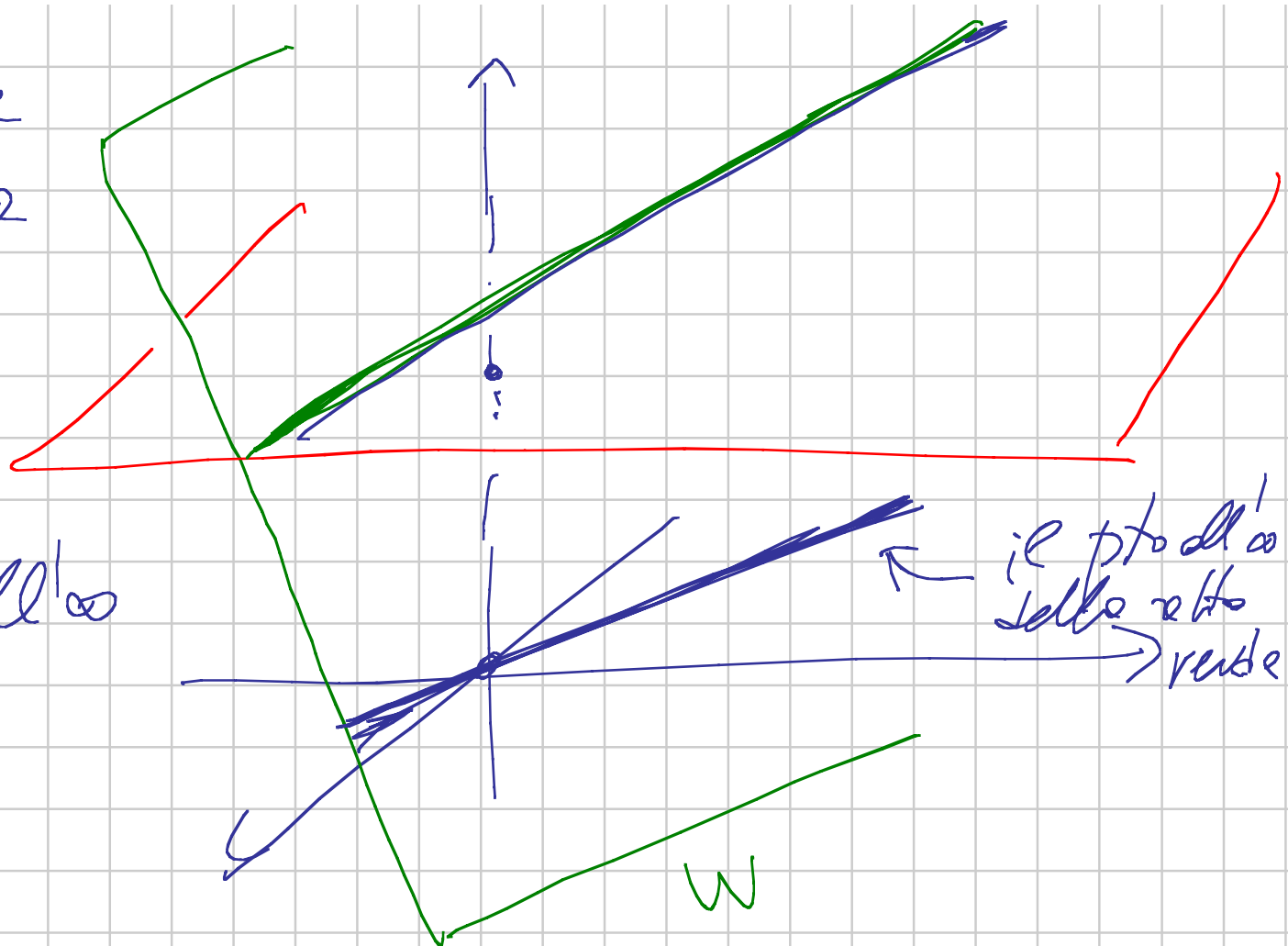
Sottospazi di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:
- dim. = 0 punti



- $\dim = 1$ rette

- retta affine di $\mathbb{R}^2$
insieme al suo
punto all'infinito

- la retta dei pt all'inf



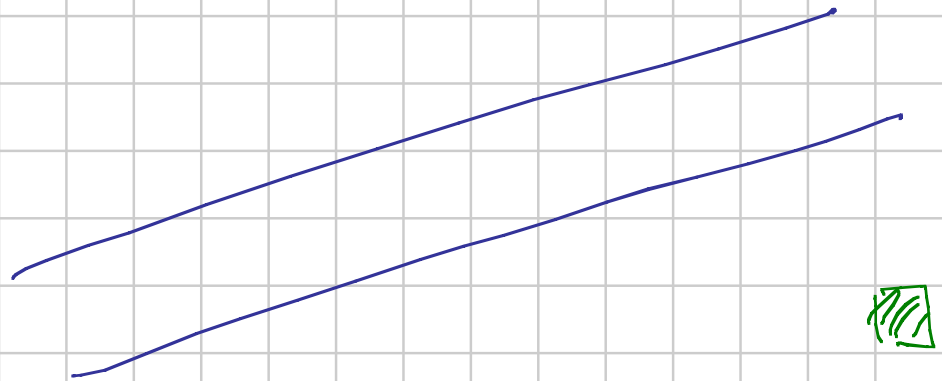
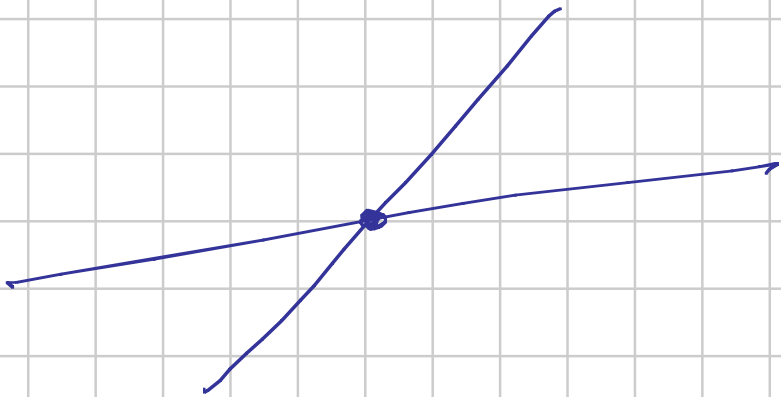
- $\dim = 2$ tutto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ -

Prop: due rette distinte di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si intersecano
sempre in un solo punto - In particolare
se non sono le rette all' ∞ , cioè sono rette
affini + ciascuna il suo pto all' ∞ , si intersecano
in un punto d' finito (incidenti) o all' ∞
(parallele) -

Dim: l_1 immagine di W_1 , $\dim W_1 = 2$
 l_2 immagine di W_2 , $\dim W_2 = 2$

$$W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3, W_1 \neq W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = l$$

$\Rightarrow l_1 \cap l_2 =$ immagine di $l =$ un punto.



Ricordo: pol. omogeneo è uno in cui tutti i monomi hanno lo stesso grado:

$$7x^2y^5z + 11xy^4z^3 - \sqrt{3}x^7z \quad \text{omop. di grado 8}$$

Oss: se $p(x)$ è omogeneo di grado d
allora $p(\lambda x) = \lambda^d \cdot p(x)$.

Conseguenze: dato $p(x)$ omogeneo,

$$x \in [x] \in P^n(\mathbb{R}) \text{ ha}$$

$$p(x) = 0 \iff p(y) = 0 \quad \forall y \in [x]$$

$$(\Leftarrow \text{ ovvio}; \Rightarrow y = \lambda \cdot x \text{ dunque } p(y) = \lambda^d \cdot p(x) = 0)$$

Morale: in $P^n(\mathbb{R})$ ha senso considerare equazioni polinomiali omogenee nelle coordinate omogenee.

Noi parleremo di grado 2 -

Esempio: le coniche -

$$\text{In } \mathbb{R}^2: \quad x^2 + y^2 = 1$$

ellisse

$$y = x^2$$

parabola

$$x^2 - y^2 = 1$$

iperbola

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$\emptyset$

One $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ così:

$$\mathbb{R}^2 = \{[x : y : 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\}$$

$$= \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : z \neq 0\}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = x^2, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0$$

non sono omogenee dunque non hanno senso
in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ - Però: si ottengono mettendo

$z = 1$ delle equazioni omogenee:

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad yz = x^2, \quad x^2 - y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

$$\text{Ellisse affine} = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2 + y^2 = z^2\} \cap$$

$$\{[x:y:z] : z \neq 0\}$$

parte affine di $\mathbb{R}^2$ la
parte finita di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ punti all'infinito dell'ellisse

$$\{ [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2 + y^2 = z^2 \} \cap$$

$$\{ [x:y:z] : z = 0 \}$$

i pts all'infinito di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

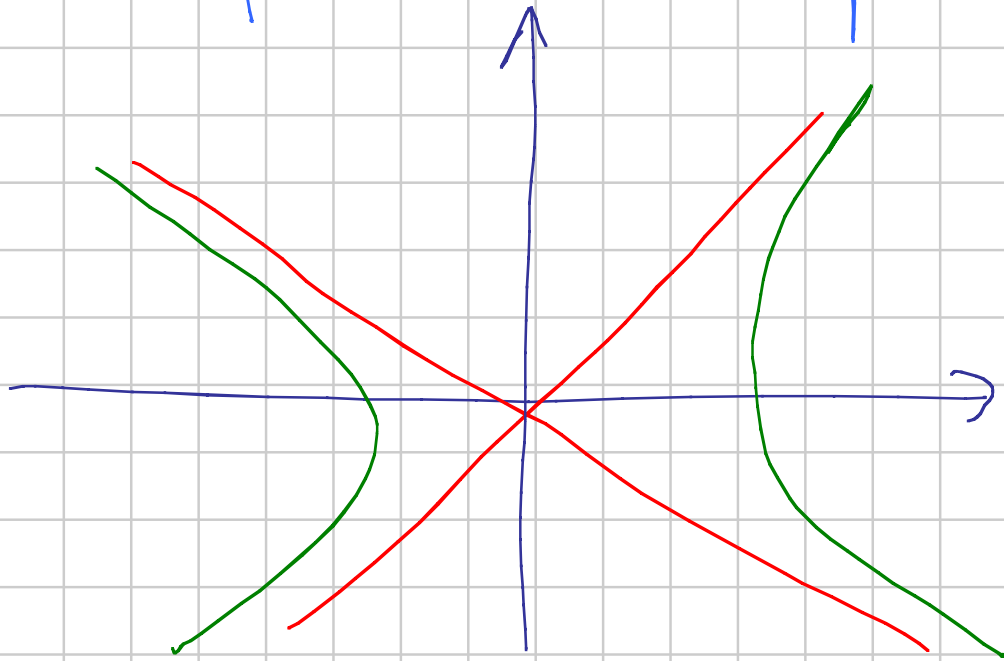
$$= \{ [x:y:0] : x^2 + y^2 = 0 \} = \emptyset$$

$$\mathcal{H}_{\text{iperbole}} = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2 - y^2 = z^2\} \cap \{z \neq 0\}$$

$$\Rightarrow \text{pt. all'inf dell'iperbole} \quad \{[x:y:0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2 - y^2 = 0\}$$

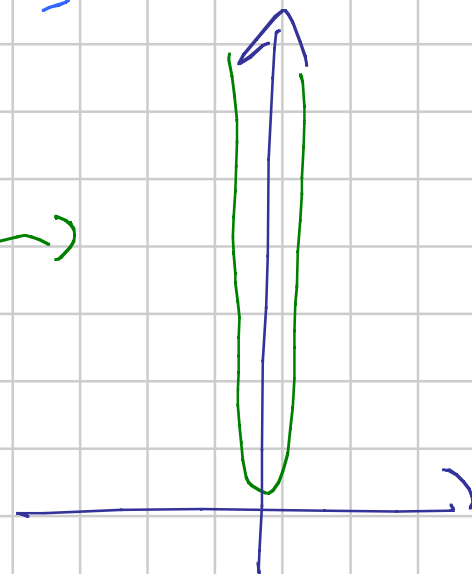
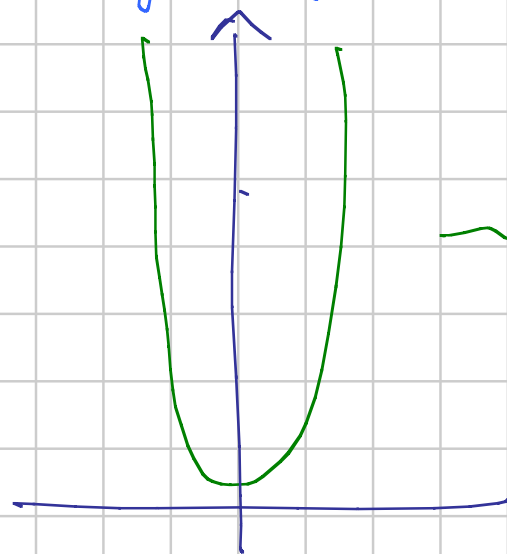
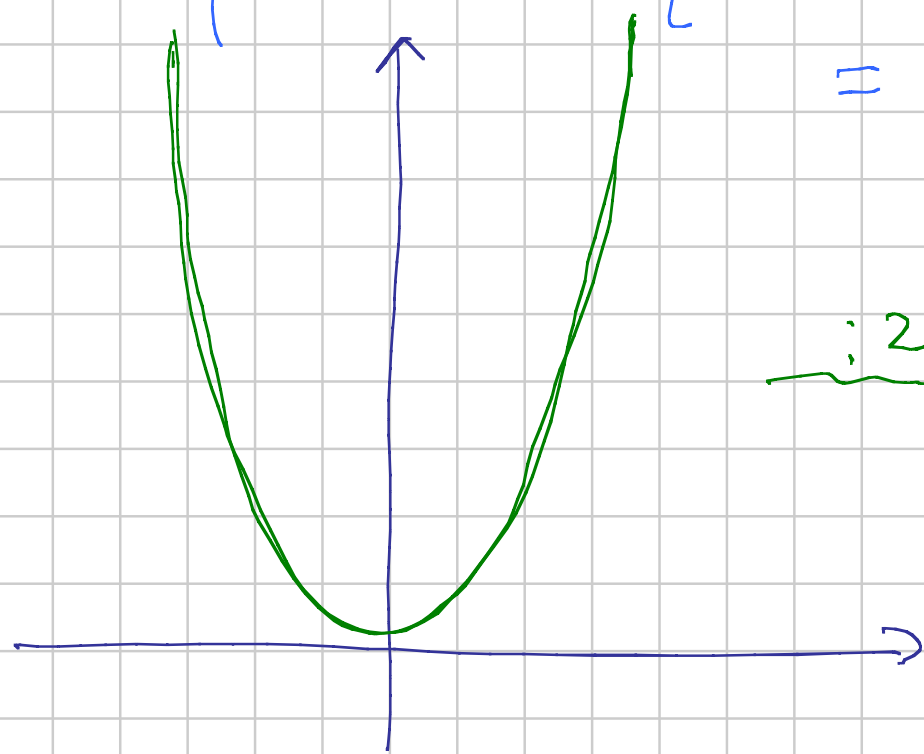
$$= \{[1:1:0], [1:-1:0]\}$$

due punti che sono
esattamente le
direzioni degli asintoti.



parabole: $\{[x:y:z] : yz = x^2\} \cap \{z \neq 0\}$

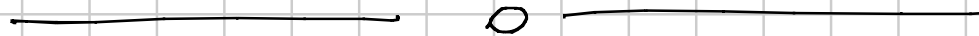
$\Rightarrow \neq 0 \infty \quad \{[x:y:z] : yz = x^2\} \cap \{z = 0\}$
 $= \{[x:y:0] : x = 0\} = \dots$



$$\dots = \{[0:1:0]\}$$

un punto = la direzione
dell'asse della parabola.

$\emptyset$ ha 0 pt. all' ∞ .



10.7.3.b

To var grad + hessian in 0 &
die ist 0 ist max/min loc.

$$f(x, y) = x^2 \cdot \cos(xy) + 2y^2 - 3xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) - 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^3 \sin(xy) + 4y - 3x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$$

$\Rightarrow 0$ é crítico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(xy) - 2xy \sin(xy) - 2xy \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3x^2 \sin(xy) - yx^3 \cos(xy) + 0 - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^4 \sin(xy) + 4 + 0$$

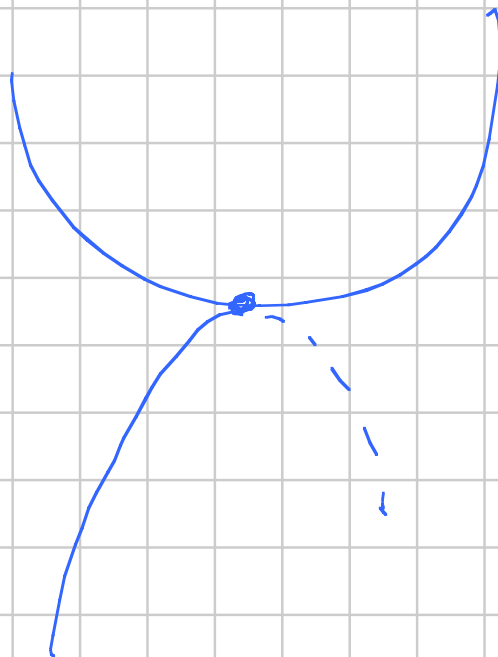
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

$$Hf(0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 2 > 0$$

$$d_2 = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ họ autoval. discord.



$\Rightarrow$ hệ max số min. loc.

10.2.4

Dire se A è normale.
Se si trovano base ortonormale
che la diagonalizza.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$$

Discutiamo quando $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ è normale:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{y} & \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x|^2 + |y|^2 = |x|^2 + |z|^2 \quad \checkmark \\ x\bar{z} + y\bar{w} = \bar{x}y + \bar{z}w \\ z\bar{x} + w\bar{y} = \bar{y}x + \bar{w}z \\ |z|^2 + |w|^2 = |y|^2 + |w|^2 \quad \checkmark \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} |y| = |z| \\ x\bar{z} + y\bar{w} = \bar{x}y + \bar{z}w \end{array} \right.$$

per moi : $|y| \neq |z| \Rightarrow$ non e normale -

$$(f) \quad A = \begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix}$$

$$|y| = |z| = 5\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & -7+i \\ * & 5-5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5i & -7+i \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1+7i \\ * & 5+5i \end{pmatrix}$$

Oss: ma 2×2 diagonalizzabile con autov. upud.
 $\bar{c}$ f.a. c diagonale $\Rightarrow$ le matre A
 ha autov. distincti $\Rightarrow$ gli autovet. relati

Now The char L

$$P_A(t) = t^2 - \text{tr}(A) \cdot t + \det(A).$$

$$\text{tr}(A) = 10 + 10i$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 25(1+2i-7) + (7+i)(1+7i) \\ &= 50i + 7 + i + 49i - 7 = 100i \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 10 \quad , \quad \lambda_2 = 10i$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :$$

$$(5+5i)x + (1+7i)y = 10x$$

$$(1+7i)y = (5-5i)x$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1+7i \\ 5-5i \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(5+5i)x + (1+7i)y = 10i x$$

$$(1+7i)y = (5i-5)x$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1+7i \\ 5i-5 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = (1-7i)(1+7i) + (5+5i)(5i-5) \\ = 50 - 50 = 0$$

$$w_1 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1+7i \\ 5-5i \end{pmatrix} \quad w_2 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1+7i \\ 5i-5 \end{pmatrix}$$

10.2.5 (b)

Verifizierte die A e unitaria:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -i \\ -i\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ i & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\|v_1\|^2 = \frac{1}{4} (1+2+1) \quad \|v_2\|^2 = \frac{1}{4} (2+0+2) \quad \|v_3\|^2 = \frac{1}{4} (1+2+1)$$

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \frac{1}{4} (1 \cdot (-i\sqrt{2}) + i\sqrt{2} \cdot 0 - i(-\sqrt{2})) = 0$$

$$\langle v_1 | v_3 \rangle = \frac{1}{4} (1(-i) + i\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - i) = 0$$

$$\langle v_2 | v_3 \rangle = \frac{1}{4} (i\sqrt{2} \cdot (-i) - \sqrt{2} \cdot 1) = 0$$

10.2.6 (c) Trovare segni autoval. d_i

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 0 & 1+i \\ -1 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

A è hermitiana - $d_1 = 2 > 0$ $d_2 = -1 < 0$

$$d_3 = 0 - i + 1 + i + 1 + 0 - 2 - 2 \cdot 2 = -4 < 0$$

$$d_i : + - -$$

$$\lambda_i : + - +$$

10.2.7 Trovare tipo di A e sua forma canonica -

$$(b) A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -12 \\ 4 & -12 & 3 \end{pmatrix}$$

A   orthonormale (colonne : base orthonormale de $\mathbb{R}^3$)

Forme canonique

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det = +1$$

$$\det = -1$$

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{\text{tr}(A) - 1}{2} \right)$$

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{\text{tr}(A) + 1}{2} \right)$$

Per moi

$$\det(A) = \frac{1}{13^2} \left(-12^2 - 12^2 - 12^2 - 64 + 27 - 12^3 \right) = -1$$

$$v = \cos \frac{1+1}{2} = 0$$

(...)

$$(b) A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -12 \\ 4 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$