

Geometria 22/3/18

Versione su $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}^n$: lunghezza

$$\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$= \sqrt{x_1 \cdot x_1 + \dots + x_n \cdot x_n}$$

$\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n}$

$\mathbb{C}^n$ $z = x + iy$

$\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$

lunghezza

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

$$= \sqrt{\bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n}$$

$$= {}^t \bar{z} \cdot z$$

Def: prod. scalare hermitiana standard in $\mathbb{C}^n$ e'

$$\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t \bar{w} \cdot z$$

Def: se V e' sp. vet. su $\mathbb{C}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ e'

• sesquilineare : lin a sx e antilineare a dx

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 | w \rangle = \alpha_1 \langle v_1 | w \rangle + \alpha_2 \langle v_2 | w \rangle$$

$$\langle v | \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle v | w_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v | w_2 \rangle$$

• hermitiano: $\langle w | v \rangle = \overline{\langle v | w \rangle}$

(pa $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$: $\langle w | v \rangle = {}^t \bar{v} \cdot w =$
 $= {}^t ({}^t \bar{v} \cdot w) = {}^t w \cdot \bar{v} = \overline{({}^t \bar{w} \cdot v)} = \overline{\langle v | w \rangle}$)

• def. pos. $\langle v | v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$

Obs: μ é hermitiano $\langle v | v \rangle = \overline{\langle v | v \rangle}$
 $\Rightarrow \langle v | v \rangle \in \mathbb{R}$

• prodotto scalare hermitiano se sesquiline,
hermitiano, def. pos -

Teoria anche al caso reale stando attenti che
non è bil. ma sesquiline, non è simm. ma hermitico.

Prop: le applicaz. sesquiline. su $\mathbb{C}^n$ sono tutte e
sole quelle del tipo $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$,

dove $\langle z | w \rangle_A = {}^t \bar{w} \cdot A \cdot z$ - Quella
 $\langle . | . \rangle_A$ è hermitiana $\Leftrightarrow {}^t \bar{A} = A$

Notazione: ${}^t \bar{A} = A^*$; se $A^* = A$
dico A è hermitiana -

• norma $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$; $\|A \cdot v\| = \underbrace{|A|}_{\text{modulo}} \cdot \|v\|$

- $$\underbrace{|\langle v|w \rangle|}_{\text{modulo}} \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

- Gram-Schmidt $v_1, \dots, v_m \rightsquigarrow u_1, \dots, u_m$
 lin. indep. base orthonorm
di $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \underbrace{\langle v_1 | u_1 \rangle}_{\text{modulo}} \cdot u_1$$

non va bene $\langle u_1 | v_1 \rangle$
lo proiettare in v_1

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|}$$

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \underbrace{\langle v_3 | u_1 \rangle}_{\text{proiezione}} \cdot u_1 - \underbrace{\langle v_3 | u_2 \rangle}_{\text{proiezione}} \cdot u_2$$

• se $w_1, \dots, w_k$ e' base ortog. di W

$$P_W(v) = \sum_{j=1}^k \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$$

non va bene
 $\langle w_j | v \rangle$:
lo vettore lin. in v .

- A è autoaggiunta rispetto $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$
(ovvero $\langle Az | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle z | Aw \rangle_{\mathbb{C}^n}$)
 $\Leftrightarrow A^* = A$ hermitiana.

- A isomorfia rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$
 (ovvero $\langle AZ | AW \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle Z | W \rangle_{\mathbb{C}^n}$)
 $\Leftrightarrow A^* \cdot A = I_n$ unitaria
 (ovvero: le colonne di A sono
 base ortonormale di $\mathbb{C}^n$)

- $\|v + w\|^2 = \langle v + w | v + w \rangle$

$$= \langle v | v + w \rangle + \langle w | v + w \rangle$$

$$= \underbrace{\langle v | v \rangle}_{\|v\|^2} + \underbrace{\langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle}_{2\operatorname{Re}(\langle v | w \rangle)} + \underbrace{\langle w | w \rangle}_{\|w\|^2}$$

$$2\operatorname{Re}(\langle v | w \rangle)$$

$\Rightarrow$ non è vero che $\| \cdot \|$ determina $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Oss: alcuni prendono $\langle \cdot | \cdot \rangle$ nel caso $\mathbb{C}$
lin a dx e antilin. a sx : non cambia
niente di sostanziale —

————— $\circ$ —————

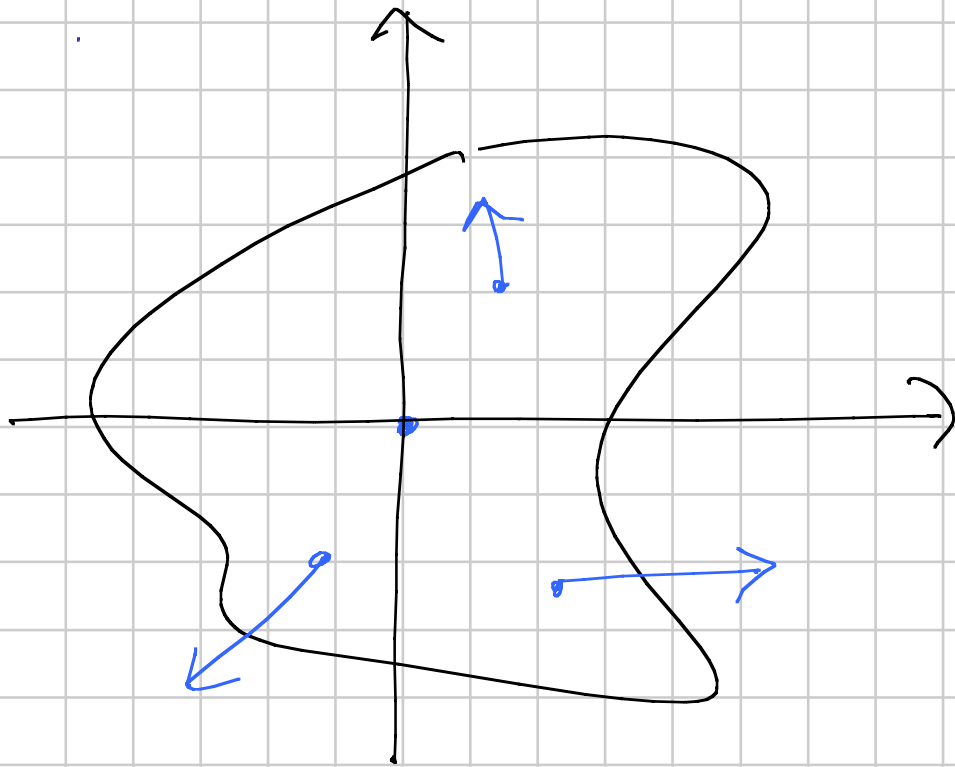
Compressione di come agisce una
applicazione lineare $V \rightarrow \hat{V}$.

Motivazione: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ corpo materiale in equilibrio ma soggetto a forze.

Equilibrio: la risultante di tutte le forze sul baricentro c è nulla. Però le forze agiscono inducendo movimenti rigidi e deformazioni.

Chiamiamo $f(x)$ la risultante delle forze nel pto x (supponiamo x coordinate t.c.).

$x=0$ è baricentro).



Dunque $f(0)=0$.

Approssimazione lin:

$$f(x) = \underbrace{A \cdot x} + o(\|x\|^2)$$

ci limitiamo a questo.

$$A = \frac{1}{2} (A + {}^t A) + \frac{1}{2} (A - {}^t A)$$

$$\cap \mathbb{I}_3(\mathbb{R})$$

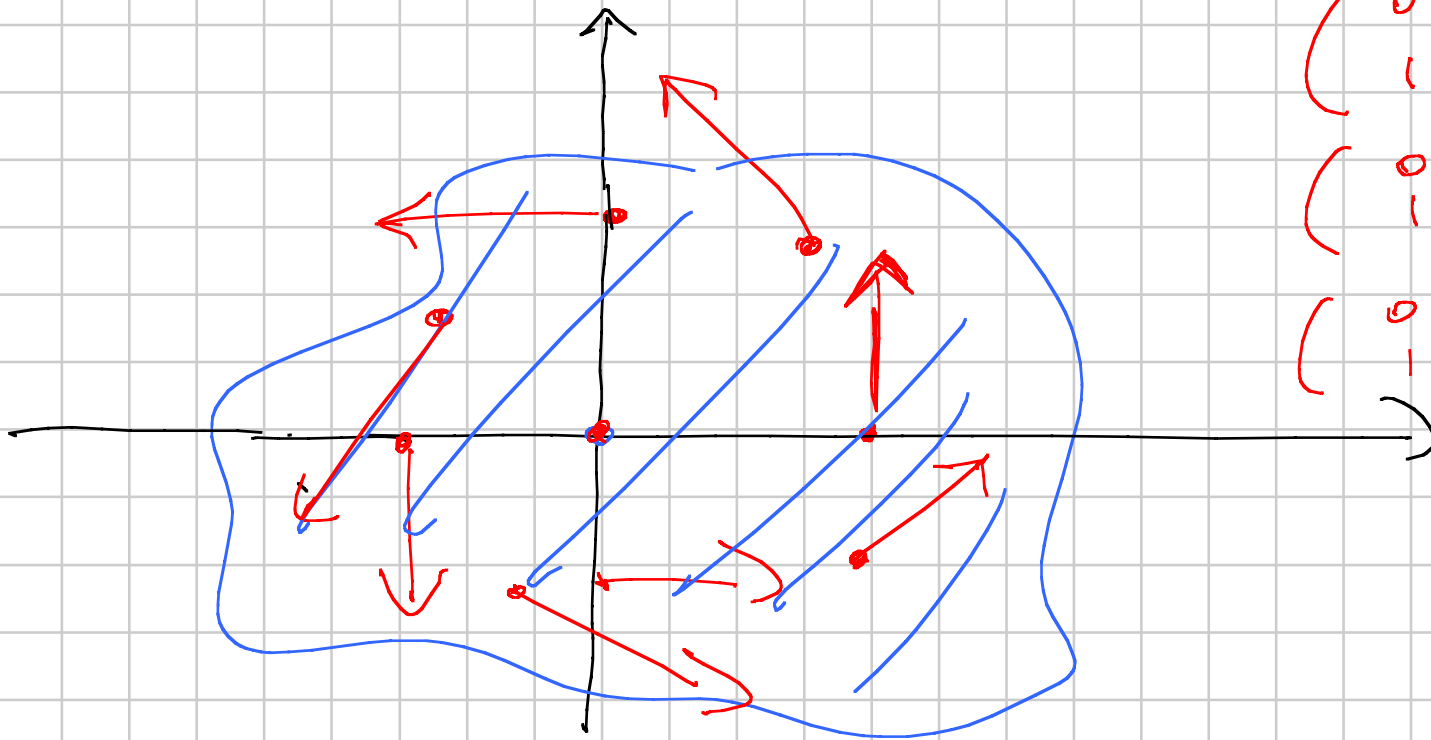
responsabile della def

$$\cap \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$$

responsabile dei
mod. rigidi.

Es: in $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} :$$



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esempio: Supponiamo che agiscano le forze
 $f(x) = A \cdot x$ con

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 10\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 10\sqrt{3} & 4 & 10 \\ -\sqrt{3} & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Miracolo: $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$A \cdot V_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5\sqrt{3} + 20\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ 30 + 8 + 10 \\ -3 + 20 + 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 24\sqrt{3} \\ 48 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot V_1$$

$$A \cdot V_2 = \dots = -2V_2 \quad A \cdot V_3 = \dots = V_3$$

$$u_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$$

$$u_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|}$$

$$u_3 = \frac{V_3}{\|V_3\|}$$

$$Au_1 = 3u_1$$

$$Au_2 = -2u_2$$

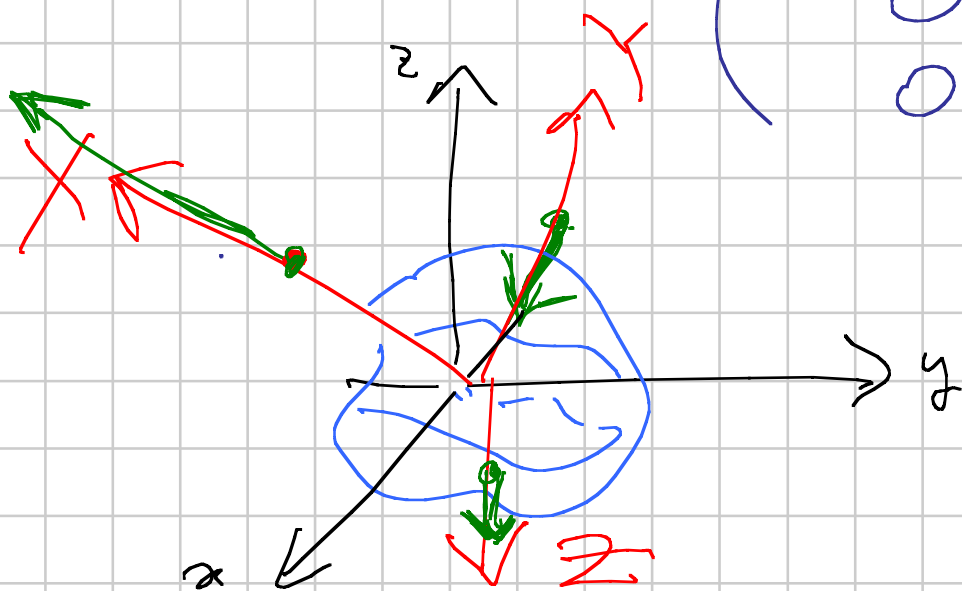
$$Au_3 = u_3$$

Quindi (u_1, u_2, u_3) è base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

Di più: esiste un nuovo riferimento cartesiano

ortogonale monometrico rispetto a cui
la matrice delle forze è

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Diagonalizzazione

V sp. vett. su K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$f: V \rightarrow V$. Problema: trovare base $\mathcal{B}$
rispetto a cui

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia "facile".

Def: dico che f è diagonalizzabile se
esiste una base $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$.

ovvero se $B = (v_1, \dots, v_m)$ ho $f(v_j) = f_j \cdot v_j \quad j=1 \dots m$.

Oss: perché $[f]_B^B$ e non $[f]_B^B$?

Perché usando $C \neq B$ di f non basta che il
range; se $\text{rank}(f) = k$ posso scegliere;

$w_1, \dots, w_k$ base di $\text{Im}(f)$; completo $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$;

$v_1, \dots, v_k$ t.c. $f(v_j) = w_j$; ho $v_1, \dots, v_k$ sono lin.

indip; scelgo base $v_{k+1}, \dots, v_m$ di $\text{Ker}(f)$

(so the $\dim = n - k$) ; define $(v_1, \dots, v_m) = \mathcal{B}$

$\vec{e}$ base ;

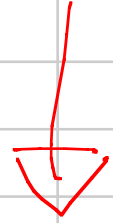
$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \hline & & & 1 & \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right) \Bigg\}^k$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$

Done in $\mathcal{B}$ so $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Def: dico che $A, B \in M_{n \times n}(K)$ sono
coniugate se $\exists M \in M_{n \times n}(K)$ invertibile t.c.

$$B = M^{-1} \cdot A \cdot M$$

 qualcuno dice
"simili" (B è coniugata di A
rispetto a M)

Prop: se $A_0 = [f]_{B_0}^{B_0}$ le altre matrici
associate a f sono tutte e sole le coniugate di A_0 .

Cor: se $A \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ le matrici che rappresentano A rispetto a basi di $\mathbb{K}^m$ sono tutte e sole le coniugate di A .

(Infatti: $A = [f_A]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_m}$.)

Per matrici $A \in M_{m \times m}$ il problema è quello di trovare M invertibile t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia facile (diagonale).

Dim: $A_0 = [f]_{B_0}^{B_0}$; se $A = [f]_{B_0}^{B_0}$,
indico con M la matrice di cambio di base
da B_0 a B (cioè $B = B_0 \cdot M$) ; ho
che $A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ -

Viceversa se $A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ ho $A = [f]_{B_0}^{B_0}$
dove $B = B_0 \cdot M$. 

Speranza su $f: V \rightarrow V$ è trovare $B = (v_1, \dots, v_m)$

$$\text{t.c. } f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j -$$

Def: chiamo $\lambda \in K$ autovalore di f se esiste $v \neq 0$

t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$ - Ogni tale v sarà detto autovettore di f rispetto all'autovalore λ -

Oss: se commentiss. $v = 0$ anzi

$$0 = f(v) = \mu \cdot v = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{K}$$

(ogni $\mu \in \mathbb{K}$ sarebbe autovettore).

Obs: f diagonalizzabile $\iff$ ha base di autovettori.

Prop: data $\mathcal{B}$ base di V ho che

$$p_f(t) = \det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$$

è un polinomio monico di grado n in t

indipendente da $\mathcal{B}$ - Inoltre

λ autovettore di $f \iff \lambda$ è radice di $p_f(t)$.

(monico: coeff. direttore = 1, cioè inizia con $t^m + \dots$)

Def: $p_f(t)$ è detto polinomio caratteristico.

La prop. dice:

- per cercare gli autovalori di f
 - trovo una $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A$
 - calcolo $P_f(t) = \det(t \cdot I_n - A)$
 - cerco le radici

- per cercare gli autovalori di $A \in M_{n \times n}(K)$
 - calcolo $P_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$
 - cerco le radici di $P_A(t)$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = \det \left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-2 & -6 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix} = (t-2)(t+3) - 24$$

$$= t^2 + t - 30 = (t+6)(t-5)$$

radici $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 5$.

Sappiamo che sono autovettori dunque devono esistere dei relativi autovalori $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$

t.c. $A \cdot v_1 = -6v_1$, $A \cdot v_2 = 5v_2$ - Li cerchiamo:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 6y = -6x \\ 4x - 3y = -6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{8x + 6y = 0} \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :$$

$$\begin{cases} 2x + 6y = 5x \\ 4x - 3y = 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{-3x + 6y = 0} \\ 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimo (prop) : $P_f(t) = \det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$
 non dipende da $\mathcal{B}$: preso $\mathcal{B}'$ denso

vedere che $\det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}) = \det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$.

So che se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$ ho $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$,

$$\det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}) = \det(\underbrace{t \cdot I_n}_{M^{-1} \cdot (t \cdot I_n) \cdot M} - M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M)$$

$$M^{-1} \cdot (t \cdot I_n) \cdot M$$

$$= \det(M^{-1} \cdot (t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \cdot M)$$

$$= \cancel{\det(M^{-1})} \cdot \det(t \cdot I_m - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \cdot \cancel{\det(M)}$$

$P_f(t)$ è pol. monico di grado n ; $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$$P_f(t) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & t - a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= t^m + \text{gradi inferiori.}$

λ autoval $\Leftrightarrow p_{\lambda}(A) = 0$:

λ autoval $\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

$\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot v - f(v) = 0$

$\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $(\lambda \cdot \text{id}_V - f)(v) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda \cdot \text{id}_V - f$ è non iniettiva

$\Leftrightarrow [\lambda \cdot \text{id}_V - f]_{\mathcal{B}}$ è non iniettiva

$\Leftrightarrow \det([\lambda \cdot \text{id}_V - f]_{\mathcal{B}}) = 0$

$\Leftrightarrow \det(\lambda \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}) = 0$

$\Leftrightarrow p_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ radice di $p_f(t)$. 

Prephiera: ricordati che

la def. di autovettore non è

"una radice del pol. caratteristica"