

20/4/2018

10. 1. 10

Discutăm la diagonalizabilitate;

$$(i) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

pol. caracteristic χ :

$$P_A(t) = \det(tI_4 - A) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & -\frac{3}{2} \\ 10 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \end{pmatrix} = (t+1) \left[t^2(t-1) + 2 \cdot \frac{3}{2} (t-1) \right] \\
 &\quad + 10(t^2+3) = \\
 &= (t^2-1)(t^2+3) + 10(t^2+3) = \\
 &= (t^2-9)(t^2+3)
 \end{aligned}$$

$$t = \pm 3, \quad t = \pm i\sqrt{3}$$

NON è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ perché non tutti gli autovalori sono reali.

E diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, che ha 4 autovalori distinti:
 (e quindi le mult. algebriche e geometriche coincidono).

Autovettore rel. $i\sqrt{3}$:

$$(i\sqrt{3} - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{3} + 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 + i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & i\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

La 1^a e la 3^a riga sono rid $\Rightarrow x = z = 0$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{è un autovettore rel. a } i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sqrt{3} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{v} \quad \text{è autovettore rel. a } -i\sqrt{3}$$

Inoltre vale: $\Rightarrow$

$$Av = i\sqrt{3}v$$

comincio questa rel.:

$$A\bar{v} = \bar{A} \bar{v} = \overline{Av} = \overline{i\sqrt{3}v} = -i\sqrt{3} \bar{v}$$

↑ perché A è una matrice reale.

In generale se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è un autovalore

di una matrice reale A allora!

(i) $\bar{\lambda}$ è un autovalore.

(v) se v è un autovettore (complesso) relativo

a $\lambda \Rightarrow \sqrt{\lambda}$ è autovettore con autovale λ .

⇐

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 2-k & 3k-2 \\ 1 & 2k-1 \end{pmatrix} = A, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$P_A(t) = t^2 - \text{tr}(A)t + \det(A)$$

$$\text{tr}(A) = 2-k + 2k-1 = k+1$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (2-k)(2k-1) - 3k+2 = -2k^2 + 2k = \\ &= 2k(1-k) \end{aligned}$$

$$P_A(t) = t^2 - (k+1)t + 2k(1-k)$$

il discriminante di $P_A(t)$ è:

$$\begin{aligned}\Delta(k) &= (k+1)^2 - 8k + 8k^2 = 9k^2 - 6k + 1 = \\ &= (3k-1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

• se $k \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow A$ ha 2 autovalori

reali distinti:

$\Rightarrow e^{-}$ diagonalizzabile.

$$\bullet \quad k = \frac{1}{3} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} = \left(t - \frac{2}{3}\right)^2$$

$\frac{2}{3}$ è un valore di mult. alg. 2,

A non è diagonalizzabile; se lo fosse,

la matrice di A in una base opportuna sarebbe

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ma la formula di cambiamento di base
implica che in qualunque base

avrai

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Contraddizione |
⇐

10.2.1 Trovare gli autovalori di A e
una base lineare di $\mathbb{R}^3$ in cui A
è diagonale

(b) TS: A simmetrica $\Rightarrow \exists$ base ortogonale
di autovettori.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -2 \\ -1 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^3 - \frac{53}{3} t^2 + \frac{227}{3} t - 59$$

$t=1$ è una radice.

Usando Ruffini:

$$P_A(t) = (t-1) \left(t^2 - \frac{50}{3} t + \frac{177}{3} \right)$$

$$t^2 - \frac{50}{3} t + \frac{177}{3} = 0$$

$$\Delta = \frac{3 \cdot 76}{9} = \frac{4}{9} \cdot 94$$

$$C = \frac{1}{2} \left[\frac{50}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{94} \right] = \begin{cases} \frac{25}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{94} \\ \frac{25}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{94} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ci sono 3 autovalori distinti.

Dato che autovettori corrispondenti a autovalori $\neq$ (per una matrice simmetrica) sono ortogonali

Una qualunque base di autovettori soddisfa la richiesta in questo caso.

$$\lambda = \frac{25}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{94}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}(\sqrt{94} - 2) \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{25}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{94} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3}(\sqrt{94} + 2) \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

autovettori

→

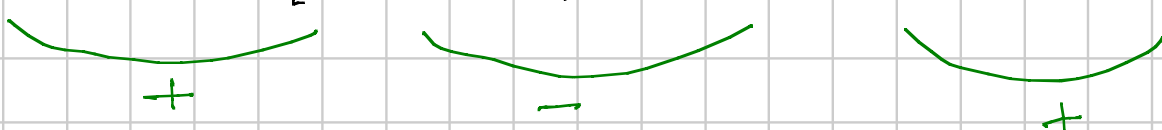
Esercizio? 10.2.2

determinare i segni degli
autovalori della matrice
A assegnata

A e⁻ simmetrica.

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = A$$

$$d_0 = 1 \quad d_1 = 3 \quad , \quad d_2 = -1 \quad d_3 = -116$$

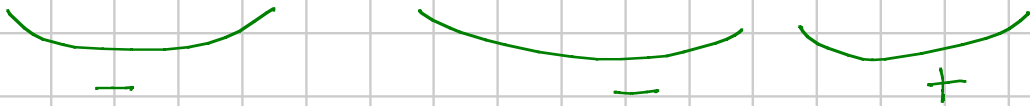


$$\det A = -84 - 8 - 24 < 0$$

$\Rightarrow$ 2 autovalori positivi e 1 negativo.

$$(c) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix} = A \leftarrow \text{simmetrico}$$

$$d_0 = 1, \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 336$$



$\Rightarrow$ 2 autovalori negativi e 1 positivo.