15/3/2018

V sp. vett. $/\mathbb{R}$ $\qquad \langle \, | \, \rangle$ prodotto scalare

$\dim V = n$

$S \subseteq V$ sottospazio, $\dim S = k$

$S^\perp = \{ v \in V \mid \langle v | w \rangle = 0 \quad \forall\, w \in S \}$

$S^\perp$ è un s. spazio:

- $0 \in S^\perp$ ✓
- $\forall\, v_1, v_2 \in S^\perp$, $\forall\, w \in S$

$$\langle v_1 + v_2 | w \rangle = \langle v_1 | w \rangle + \langle v_2 | w \rangle = 0 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in S^\perp$$

- $\forall\, v \in S^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \forall\, w \in S$:

$$\langle \lambda v | w \rangle = \lambda \langle v | w \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

<u>OSS</u>: sia $v_1, \dots, v_k$ base di S:

$$v \in S^\perp \iff \langle v | v_i \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, k$$

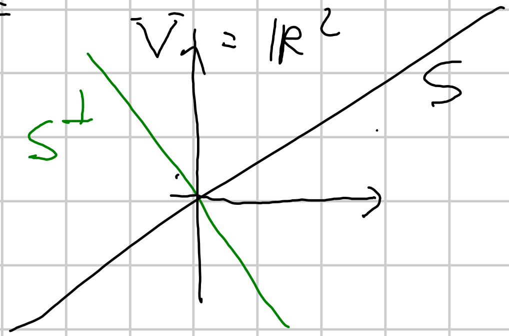
Infatti: $\Rightarrow$) è evidente.

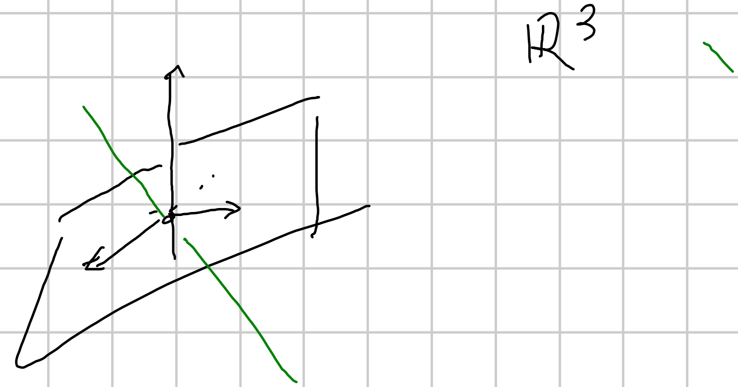
$\Leftarrow$) per linearità, $\langle v | v_i \rangle = 0 \ \forall\, i = 1, \dots, k$

implica che v è ortogonale a ogni comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$, cioè a ogni el. di S

<u>Corollario:</u> $\dim S^\perp \geq n - k = \dim V - \dim S$

<u>Es:</u>





$\vdash$

Sia $v \in S \cap S^\perp \Rightarrow \langle v | v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow \quad S \cap S^\perp = \{0\}$

Grassmann: $\quad \dim S + \dim S^\perp = \dim(S + S^\perp) + \dim(S \cap S^\perp) \le$

$$\le \dim V + 0$$

cioè $\quad \dim S^\perp \le \dim V - \dim S = n - k$

Dato che abbiamo visto: $\dim S^\perp \geq n-k$,

segue $\quad \dim S^\perp = n-k$.

Quindi: $\quad S \cap S^\perp = \{0\}, \quad \dim S + \dim S^\perp = n$

$$\Rightarrow \quad V = S \oplus S^\perp$$

In alternativa, dopo avere osservato che $S \cap S^\perp = \{0\}$

possiamo far vedere $S + S^\perp = V$:

Sia $v_1, \dots, v_k$ base di S

completo a $v_1, \dots, v_n$ base di V

Applico l'algoritmo di G-S a $v_1, \dots, v_n$

e ottengo $u_1, \dots, u_n$ base $\perp$normale di V

$\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = S$

$\mathrm{Span}(u_{k+1}, \dots, u_n) \leq S^\perp$

Sia $v \in V$ $\quad v = \underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k}_{\in S} + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n}_{\in S^\perp}$

$\Rightarrow \quad V = S + S^\perp \quad \Rightarrow \quad V = S \oplus S^\perp$

$\longmapsto$

Proiezione ortogonale su S: proiezione su S associata alla dec. $V = S \oplus S^\perp$

Ripasso: supponiamo di avere una dec. in somma diretta

$$V = W \oplus Z$$

ho due proiezioni: $p : V \longrightarrow W$, $q : V \longrightarrow Z$ lineari

tali che: $p^2 = p$, $q^2 = q$

$pq = qp = 0$, $p + q = Id$

In particolare $\ker p = Z$, $\ker q = W$

Questo ci fa vedere che p dipende da Z, non solo da W

Def: proiezione ortogonale su S la proiezione $p: V \longrightarrow S$ associata alla decomposizione

$$V = S \oplus S^{\perp}$$

p dipende solo da S (una volta fissato il prodotto scalare).

Sia $v_1, \dots, v_k$ una base ortogonale di S:

$p: V \longrightarrow S$ è data da:

$$p(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\| v_i \|^2} v_i$$

Infatti: $\bullet \quad p(v) \in S$

$$v = p(v) + \underbrace{(v - p(v))}$$

e $\forall j = 1, \dots, k$ $\quad \langle v_j | v - p(v) \rangle =$

$$= \langle v_j | v \rangle - \langle v_j | p(v) \rangle =$$

$$= \langle v_j | v \rangle - \langle \cancel{v_j | v_j} \rangle \frac{\langle v | v_j \rangle}{\cancel{\| v_j \|^2}} = 0$$

OSS: Sia $v = x + y$ con $x, y \in V : \langle x | y \rangle = 0$

$$\|v\|^2 = \langle v | v \rangle = \langle x + y | x + y \rangle =$$

$$= \langle x | x \rangle + \langle y | y \rangle + 2 \langle x | y \rangle =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 0 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Se $p : V \longrightarrow S$ è la proiezione ortogonale:

$$v = p(v) + (v - p(v))$$

$$\|v\|^2 = \|p(v)\|^2 + \|v - p(v)\|^2 \geq \|p(v)\|^2$$

Vale:

$$\|v\|^2 \geq \|pv\|^2$$

e vale l'$=$ $\Leftrightarrow$ $v = pv \Leftrightarrow v \in S$

Sia (come prima) $v_1, \dots, v_k$ base $\perp$ale di S

$$p(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

Vale: $$\|p(v)\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\langle v | v_i \rangle)^2}{\|v_i\|^4} \|v_i\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | v_i \rangle^2}{\|v_i\|^2}$$

Disuguaglianza di BESSEL: $v_1, \ldots, v_k$ ortogonali
$v \in V$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | v_i \rangle^2}{\|v_i\|^2} \leq \|v\|^2$$