

14/3/2018

$V$  spazio vett. reale,  $\dim V = n$ ,  $\langle | \rangle$  prodotto scalare  
 $v_1, \dots, v_k \in V \setminus \{0\}$  vett.;

• sistema ortogonale  $\Leftrightarrow \langle v_i | v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

• sistema ortonormale  $\Leftrightarrow$  sistema ortogonale  
e unitario:  
 $\|v_i\| = 1, \quad \forall i = 1, \dots, k$

Fatto:  $v_1, \dots, v_k$  sist. ortogonale  $\Rightarrow v_1, \dots, v_k$  linearmente indip.

In particular:  $k \leq n$

if  $k = n \Rightarrow v_1, \dots, v_n$  form a base

Since  $v_1, \dots, v_n$  base orthonormal:

$$v \in V \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}:$$

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

$$\langle v | v_1 \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n | v_1 \rangle = \lambda_1 \langle v_1 | v_1 \rangle + \lambda_2 \langle v_2 | v_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_n | v_1 \rangle$$

$$= \|v_1\|^2 \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\langle v | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

In generale:  $\langle v | v_i \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2$

$$\Rightarrow \lambda_i = \underbrace{\langle v | v_i \rangle}_{\|v_i\|^2}, \quad i=1, \dots, n$$

↑ dipende solo da  $v$  e  $v_i$   
⊥

Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:

$x_1, \dots, x_n$  base di  $V$ .

voglio costruire  $v_1, \dots, v_n$  base ortonormale

f.e.:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \text{Span}(x_1, \dots, x_i) = \text{Span}(v_1, \dots, v_i)$$

Per  $i = 1$ :

$$\text{vogliamo} \quad \text{Span}(v_1) = \text{Span}(x_1)$$

Pongo:

$$v_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad \text{in modo che} \quad \|v_1\| = 1$$

Per  $i = 2$ :

$$\text{Span}(x_1, x_2) = \text{Span}(v_1, v_2)$$

e  $x_1, x_2$  sono un sistema  $\perp$  normale.

$$\text{cioè} \quad \|x_1\| = 1 \quad \text{e} \quad \langle x_1 | x_2 \rangle = 0$$

Costruiamo:  $y_2 = x_2 + \alpha v_1$  :  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{Span}(y_2, x_1) = \text{Span}(x_2, x_1) = \text{Span}(x_2, v_1)$$

Vogliamo  $0 = \langle y_2 | v_1 \rangle = \langle x_2 + \alpha v_1 | v_1 \rangle =$   
 $= \langle x_2, v_1 \rangle + \alpha \langle v_1 | v_1 \rangle = \langle x_2 | v_1 \rangle + \alpha$

Se scegliamo:  $y_2 = x_2 - \langle x_2 | v_1 \rangle v_1$

$$\langle y_2 | x_1 \rangle = 0$$

$x_1, y_2$  sono un sistema ortogonale

infatti:  $y_2 \neq 0$  perché  $x_2$  e  $y_2$  sono ind.

Pongo 
$$v_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

↙

In generale! Sull'angolo di vettore costruito

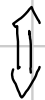
$v_1, \dots, v_k$  ortonormale t.c.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \text{Span}(x_1, \dots, x_k)$$

Cerco 
$$y_{k+1} = x_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$$
 in modo tale che

$$\langle y_{k+1} | v_i \rangle = 0$$

$$\forall i = 1, \dots, k$$



$$a_i = -\langle x_{k+1} | v_i \rangle$$

Poniamo:

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle x_{k+1}, v_i \rangle v_i$$

ho quindi

$$\langle y_{k+1}, v_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$y_{k+1} \neq 0,$$

Inoltre se  $y_{k+1} = 0$ , allora

$$x_{k+1} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) =$$

$$= \text{Span}(x_1, \dots, x_k)$$

Condizione perche

$x_1, \dots, x_n$  sono  
una base

Poniamo 
$$v_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$$

$v_1, \dots, v_{k+1}$  sono un sistema ortogonale

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_{k+1}) = \text{Span}(x_1, \dots, x_k, v_{k+1})$$

↑ ipotesi induttiva

$$= \text{Span}(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}) = \text{Span}(x_1, \dots, x_{k+1})$$

$\uparrow$   
 per definizione di  $y_{k+1}$

□

OSSERVAZIONE: (i)  $x_1, \dots, x_n$  base

$v_1, \dots, v_n$  base 1-normale ottenuta

dove  $x_1, \dots, x_n$  trinite G-S,

la matrice di coefficienti di base è triangolare  
superiore e gli elementi sulla diagonale sono  $> 0$

(2) Sia  $x_1, \dots, x_k$  sistema ortogonale.

$\Rightarrow \exists v_{k+1}, \dots, v_n \in V :$

$x_1, \dots, x_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  è una  
base ortogonale di  $V$ .

Inoltre, per completare  $x_1, \dots, x_k$  a  
una base  $x_1, \dots, x_n$ .

Applico G-S a queste base e ottengo  
base 1-normale  $v_1, \dots, v_n$

Osservo che  $v_1 = x_1, \dots, v_k = x_k$  per  
una funzione  $f$  l'algoritmo di G. S.