

13/4/18

10. 1. 2

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tI - A)$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+3 & 0 \\ -1 & t-7 \end{pmatrix} = (t+3)(t-7)$$

entweder:  $t = -3$  e  $t = 7$   $\rightarrow$

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-4 & 3 \\ 3 & t-1 \end{pmatrix} = (t-4)(t-1) - 9 = \\ = t^2 - 5t - 5$$

$$\Delta = 25 + 20 = 45$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$(f) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-3 & 2 \\ -1 & t-4 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-3)(t-4) + 2 = t^2 - 7t + 14$$

$$\Delta = 49 - 56 = -7 < 0$$

Non ci sono autovalori reali.

Gli autovalori complessi sono:  $t = \frac{7 \pm i\sqrt{7}}{2}$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{5}(7+i) \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1-i & \frac{1}{5}(7+i) \\ i-2 & t-3 \end{pmatrix} = (t-1-i)(t-3) + \frac{1}{5}(7+i)(2-i)$$

$$= t^2 - (4+i)t + 3+3i + \frac{1}{5}(15-5i) =$$

$$= t^2 - (4+i)t + 6+2i$$

$$\Delta = (4+i)^2 - 4(6+2i) = 16 + \cancel{8i} - 1 - 24 - \cancel{8i} =$$

$$= -9$$

$$t = \frac{4+i \mp 3i}{2} = \begin{matrix} 2-i \\ 2+2i \end{matrix}$$

(j)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & -3 & 3 \\ 0 & t+1 & -3 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-2)(t^2-1) - 2(9-3t-3) =$$

$$= t^3 - t - 2t^2 + 2 - 18 + 6t + 6 =$$

$$= t^3 - 2t^2 + 5t - 10 = t^2(t-2) + 5(t-2) = \\ = (t^2+5)(t-2)$$

gli autovalori sono:  $t = 2, \pm i\sqrt{5}$

$$(c) \quad V = \{x + 2y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$f: V \rightarrow V \quad f(x) = \begin{pmatrix} -3x - 8y + 2z \\ x + 3y - 4z \\ x + 2y - 8z \end{pmatrix}$$

$$\dim V = 2$$

$$\text{Base di } V: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1, v_2$$

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \in V$$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \in V$$

vediamo che  $f(V) \subseteq V$

$v_2$  è un autovettore per  $f$  con autovalore 1

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} = f(v_2) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ -\mu \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = -7 \\ \mu = 3 \end{matrix}$$

Matrice associata a  $f$  nella base  $v_1, v_2$ :

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori:  $-7, 1$

$$(n) \quad V = \{ p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \mid p(1) = 0 \}$$

$$\dim V = 3 - 1 = 2$$

$$f: V \longrightarrow V \quad f(p(t)) = (t-1)p'(t) + (t^2-1)p(-2)$$

(Esercizio: verificare che  $f$  è lineare)

$$f(p(t)) = (t-1)[p'(t) + p(-2)(t+1)] \in V$$

$$\forall p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$$

$$\text{Base di } V: \quad \overset{= p_1}{t-1}, \quad \overset{= p_2}{t^2-t} \in V$$

sono indipendenti:  $\Rightarrow$  sono una base di  $V$



$$\begin{aligned}
 f(p_1) &= (t-1) [1 + (-3)(t+1)] = \\
 &= (t-1)(-3t-2) = -2p_1 - 3p_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(p_2) &= (t-1) [2t-1 + 6(t+1)] = (t-1)[8t+5] = \\
 &= 5p_1 + 8p_2
 \end{aligned}$$

Matrice associata a  
 $f$  nella base  $p_1, p_2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$p_f(t) = p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+2 & -5 \\ 3 & t-8 \end{pmatrix} = (t+2)(t-8) + 15 =$$

$$= t^2 - 6t - 1$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 + 1 = 10$$

$$t = 3 \pm \sqrt{10}$$

⇐

10, 1.4 :

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$p_A(t)$  ha  $n$  radici reali (contate con molteplicità).

Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  sono le radici reali di  $p_A(t)$

$$P_A(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{d_k} \quad \begin{array}{l} d_i \in \mathbb{N} \\ d_i > 0 \end{array}$$

$$e \quad d_1 + \dots + d_k = n$$

Per vedere che  $A$  è diagonalizzabile come matrice complessa, lo è anche come matrice reale.

Criterio di diagonalizzabilità:  $A$  è diagonalizzabile

- $\Leftrightarrow$  (a) la somma delle mult. alg. degli autovalori è  $n$   
 (b) le mult. alg. sono uguali a quelle geometriche.

Nel nostro caso le mult. alg. sono  $d_1, \dots, d_k$   
e la condizione è verificata sia su  $\mathbb{C}$  che su  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Mult. di } \lambda_i & \quad \text{è } \dim \ker(A - \lambda_i I) = \\ & = n - \text{rk}(A - \lambda_i I) =: \beta_i \end{aligned}$$

Sappiamo che:  $\beta_i = d_i$  se considero  $A$  come  
matrice complessa, che implica  $A$  è  
diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$ .

D'altra parte il rango di una matrice reale

non cambia se lo penso come matrice complessa,  
e lo può essere nel campo con il criterio degli autovalori.

$\Rightarrow$  la condizione (b) del criterio di diagonalizzabilità  
è verificata anche se penso  $A$  come matrice reale

$\Rightarrow A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$   $\square$