

Geometrie 12/4/18

8.5.4 (b) $\mathbb{C}^2$ projekt. su $\text{Span} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}}_w \right) = W$

$$p_W(z) = \frac{\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^2}}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{(3+i)z_1 + (1-2i)z_2}{9+1+1+4} \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 1-7i \\ 1+7i & 5 \end{pmatrix} \cdot z$$

X

autobaggiante:

$$A^* = A$$

$$A^2 = A$$

$$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 1-7i \\ 1+2i & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 1-7i \\ 1+2i & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cancel{15} \cdot 15} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{100} + \cancel{1+49} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{9} \quad \mathbb{C} \quad W = \text{Span} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 3 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2i \\ -4 \\ 3-i \end{pmatrix}}_{w_2} \right)$$

$$w'_2 = w_2 - \frac{\langle w_2 | w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 \quad \leadsto w_1, w'_2 \text{ dann orthog. zu } W$$

$$\uparrow_W(z) = \frac{\langle z | w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 + \frac{\langle z | w'_2 \rangle}{\|w'_2\|^2} \cdot w'_2 = \dots$$

gültig:

$$W^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} (1-i)(3-i) - 3 \cdot (-4) \\ -1(3-i) + 3 \cdot 2i \\ 1 \cdot (-4) - (1-i)(2i) \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Span} \begin{pmatrix} 14 + 4i \\ -3 - 7i \\ -6 + 2i \end{pmatrix}$$

$$\phi_W(z) = z - \frac{(14 - 4i)z_1 + (-3 + 7i)z_2 + (-6 - 2i)z_3}{14^2 + 4^2 + 9 + 49 + 36 + 4} \begin{pmatrix} 14 + 4i \\ -3 - 7i \\ -6 + 2i \end{pmatrix}$$

$$= \dots = A \cdot z \quad A^* = A = A^2.$$

$$\boxed{j} \quad V = \mathbb{C}_{\leq 1}[z] \quad \langle p(z) | q(z) \rangle \\ = p(z) \cdot \overline{q(z)} + 2 p(-i) \cdot \overline{q(-i)}$$

$$W = \text{Span} \left(\underbrace{1 - zi + (3+i)z}_{w(z)} \right)$$

— $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is prod scal.

- sesquilinear ✓

- hermitiano ✓

- $\langle p(z) | p(z) \rangle \geq 0$ ✓

$$\langle p(z) | p(z) \rangle = 0 \Rightarrow |p(z)|^2 + 2|p(-i)|^2 = 0$$

$$\Rightarrow p(z) = p(-i) = 0$$

$$\Rightarrow p(z) = 0 \quad (\text{ha } \deg \leq 1)$$

Chiamo f le proiezioni ortog. su W :

$$\frac{1}{2} (a_0 + a_1 z) = \frac{\langle a_0 + a_1 z \mid w(z) \rangle}{\|w(z)\|^2} \cdot w(z)$$

$$= \frac{(a_0 + 2a_1)(7) + 2(a_0 - 2ia_1)(2 + 5i)}{49 + 4 + 25} ((1 - 2i) + (3 + i)z)$$

$$= \frac{(11 + 10i)a_0 + (24 - 4i)a_1}{78} ((1 - 2i) + (3 + i)z)$$

$$= \dots$$

Finito il calcolo e verifichiamo che:

$$f(f(a_0 + a, z)) = f(a_0 + a, z)$$

$$\langle f(a_0 + a, z) | b_0 + b, z \rangle = \langle a_0 + a, z | f(b_0 + b, z) \rangle$$

————— 0 —————

Def: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ normale se $A^* A = A A^*$.

Teo: A normale $\iff \exists M$ t.c. $M^* = M^{-1}$, $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Prop: A hermitiana $\Leftrightarrow \exists M$ t.c. $M^* = M^{-1}$ e
 $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ con $\lambda_j \in \mathbb{R}$

($\Leftrightarrow$ è normale e ha
autovalori reali)

Dim: $\Rightarrow$ Devo vedere che $\lambda_j \in \mathbb{R}$:
prendo autovettore v_j (= j -esima col. di M)

$$\langle Av_j | v_j \rangle = \langle \lambda_j v_j | v_j \rangle = \lambda_j \cdot \|v_j\|^2$$

||

$$\langle v_j | Av_j \rangle = \langle v_j | \lambda_j v_j \rangle = \overline{\lambda_j} \cdot \|v_j\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda_j = \overline{\lambda_j} \quad \checkmark$$

$$\Leftarrow \text{Se } M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ con } M^* = M^{-1}, \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h.o. } A &= M \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} M^* \\
 \Rightarrow A^* &= M^{**} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_m \end{pmatrix} M^* \\
 &= M \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} M^* = A, \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Cor: A hermitiana;

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def pos. $\Leftrightarrow$ tutti gli autoval
di A sono > 0

$$\Leftrightarrow d_j > 0 \quad j=1, \dots, n$$

(Dimo cose ieri su $\mathbb{R}$.)

Prop: A antihermitica $\Leftrightarrow$ nonnule e autov. $\in i\mathbb{R}$

Dim: $\Rightarrow$

$$\langle Av_j | v_j \rangle = \lambda_j \cdot \|v_j\|^2$$

$$\langle v_j | A^* v_j \rangle = -\langle v_j | Av_j \rangle = -\overline{\lambda_j} \cdot \|v_j\|^2$$

dunque $\overline{\lambda_j} = -\lambda_j$ cioè $\lambda_j \in i\mathbb{R}$.

⇐, come sopra

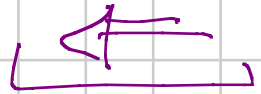


Prop: A unitaria $\Leftrightarrow$ normale e ha tutti
autovettori di modulo 1.

Dim: $\Rightarrow$

$$\|Av_j\| = \|\lambda_j v_j\| = |\lambda_j| \cdot \|v_j\|$$

dunque $|\lambda_j| = 1$



$$M^{-1}AM = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_D$$

$$|\lambda_j| = 1$$

$\Rightarrow D$ unitaria

$$\Rightarrow A = M \cdot D \cdot M^{-1} \quad e^c \text{ unitaria} \quad \square$$

Matrici che non possiamo diagonalizzare:

antisimmetriche $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ $P_A(t) = t^2 + a^2$
non ha autovalori reali

rotazioni $A = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix}$

(impossibile che $A \cdot v = \lambda \cdot v$)

Teo: Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, ${}^t A = -A$

$\exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, ${}^t M = M^{-1}$ t.c.

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

dove ogni B_j è $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.

Con: $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ $\left. \begin{array}{l} {}^t A = -A, A \neq 0 \end{array} \right\}$, tramite un cambiamento
isometrico di riferimento la trasformo in

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

"Dico"

Antisimm. reale $\Rightarrow$ antihermitiana
 $\Rightarrow$ autov. imm. puri.

$\lambda_j = 0 \Rightarrow \lambda_j \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ho un corrisp. autoval. reale $\Rightarrow$ blocchi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \times 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_j = i\alpha \quad \alpha \neq 0$ ho anche l'autovalore $-i\alpha$

$(p_X(t) \in \mathbb{R}[t])$ dunque se ho una radice $z \in \mathbb{C}$ ha anche la radice $\bar{z}$:

$$0 = p(z) \Rightarrow 0 = \overline{p(z)} = p(\bar{z})$$

Prendo $x+iy \in \mathbb{C}^n$ autovettore risp. a $i\alpha$:

$$A(x+iy) = i\alpha(x+iy)$$

$$\Rightarrow Ax + iAy = i\alpha x - \alpha y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax = -\alpha y \\ Ay = \alpha x \end{cases} \Rightarrow [A]_{(x,y)}^{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

da cui i blocchi antisimmetr. 2×2

Dovendo vedere che posso realizzare

questo blocco tramite una ortog. coer. che pone
mentre (x, y) ortogonali: osservo che

$$A(x + iy) = i\alpha(x + iy)$$

$$\Rightarrow A(x - iy) = -i\alpha(x - iy)$$

$$\Rightarrow x - iy \text{ è autovett. risp. a } -i\alpha \neq i\alpha$$

So che A è normale dunque autovett. risp. a

ad autovel. districli sono $\perp$ tra loro

$$\Rightarrow \langle x + iy | x - iy \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$$

$$\Rightarrow ({}^t x + i {}^t y)(x + iy) = 0$$

$$\Rightarrow {}^t x \cdot x + i {}^t x \cdot y + i {}^t y \cdot x - {}^t y \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow (\|x\|^2 - \|y\|^2) + 2i \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$$

$$\Rightarrow \|x\| = \|y\| \quad \langle x|y \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$$

Allora basta dividere per $\|x\| = \|y\|$ e va bene -
 "□"

Teo: Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale
 (${}^t A = A^{-1}$; isometria; col. base ortogonale)
 allora $\exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.c. ${}^t M = M^{-1}$ e

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix} \quad \text{con } B_j = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

o $B_j = (1)$ o $B = (-1)$.

Con: a meno di trasformazioni isometriche
una isometria di $\mathbb{R}^3$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

identità

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

rifl. risp.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

rifl. risp.

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

rifl. risp.

a piano

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotaz. intorno a
retta l

a retta

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotaz. intorno a retta l
+ riflessione rispetto a $l^\perp$

"Dileo": A ortog. $\Rightarrow A$ unitaria
 $\Rightarrow |\lambda_i| = 1$

- $\lambda_j = +1 \rightsquigarrow$ blocco (1)
- $\lambda_j = -1 \rightsquigarrow$ blocco (-1)
- $\lambda_j = e^{i\varphi} \notin \mathbb{R}$

Pseudo $x+iy \in \mathbb{C}^n$ autovettore:

$$A \cdot (x+iy) = (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) (x+iy)$$

$$\Rightarrow Ax + i Ay = (\cos(\varphi) \cdot x - \sin(\varphi) \cdot y)$$

$$+ x (\cos(\varphi) \cdot y + \sin(\varphi) \cdot x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ay = \cos(\varphi) \cdot y + \sin(\varphi) \cdot x \\ Ax = -\sin(\varphi) \cdot y + \cos(\varphi) \cdot x \end{cases}$$

$$\Rightarrow [A]_{(y,x)}^{(y,x)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Come sopra, devo vedere che posso prendere (x,y) ortogonale: basta notare che

$e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$ è autoval con autovett

$x - iy = \overline{x + iy}$ da cui segue sopra

$$\|x\| = \|y\|, \quad \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

✓ "11"

Spazio euclideo n -dim. e $\mathbb{R}^n$ con
le distanze indotte dal prodotto scalare standard.

Def: chiamo isometria una $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
che preserva le distanze.

Attenzione: non richiedo più che sia lineare;
una isometria lineare è una matrice A
ortogonale (${}^t A = A^{-1}$).

(Isom. lin. del piano:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

identit 

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

rifl. risp.
a retta

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

rifl. risp.
a origine

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

rotaz. intorno
a origine.)

Oss: anche le traslazioni sono isometrie -

Def: chiamo affine una transf. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
del tipo $f(x) = A \cdot x + b$, $A \in M_{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Teo: le isometrie di $\mathbb{R}^m$ sono tutte affini.

Dim ($m=2$): parto da f isometria;

per alcune volte sostituisco f con $g \circ f$
dove g è isometria affine, finché trovo
 $f = \text{id}$; ho allora

$$g_k \circ \dots \circ g_2 \circ g_1 \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Rightarrow f = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \dots \circ g_k^{-1} \quad \text{ogni } g_i \text{ è isom. affine} \Rightarrow D \text{ anche } g_i^{-1} \Rightarrow D \text{ anche } f$$

Dunque:

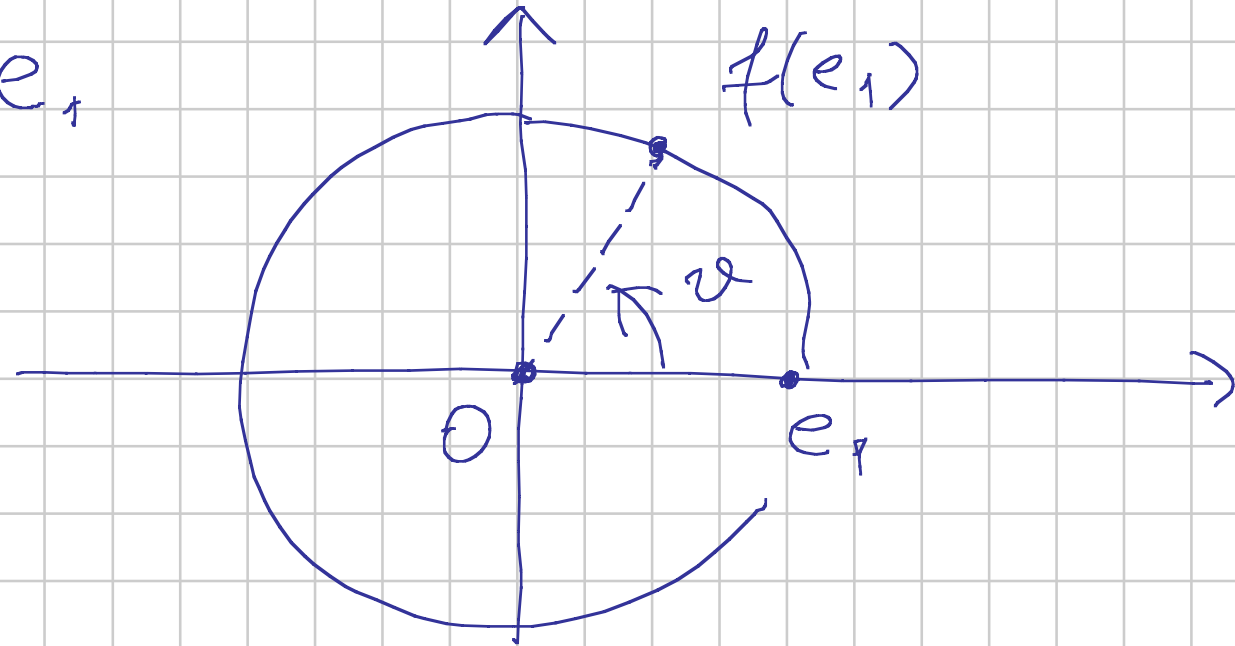
Se $f(0) \neq 0$ sostituisco f con

$$\tau_{-f(0)} \circ f$$

$$(\tau_v(x) = x + v)$$

Ora ho $f(0) = 0$.

Se $f(e_1) \neq e_1$



Sostituisco f con $\text{rot}_O(-\vartheta) \circ f$.

Adesso $f(0) = 0, f(e_1) = e_1$.

Se $f(e_2) \neq e_2$

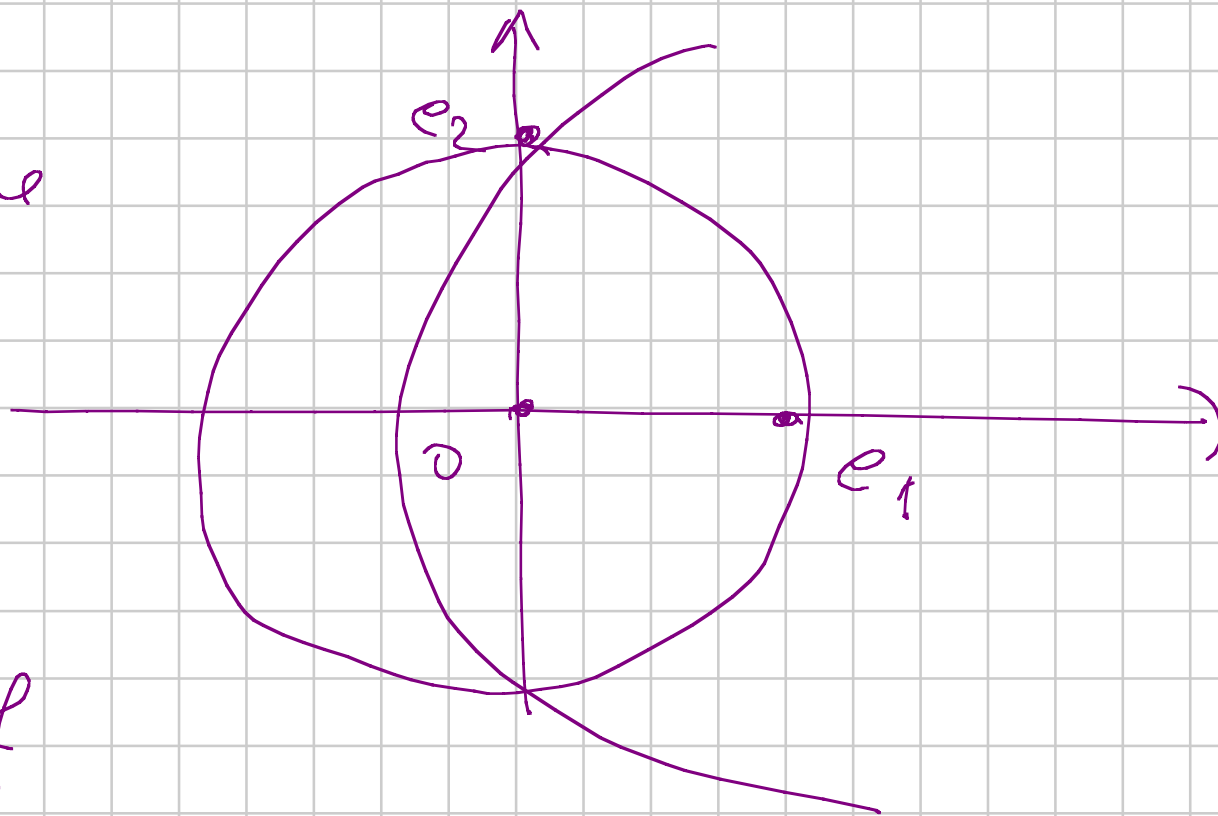
posso solo avere

$f(e_2) = -e_2$,

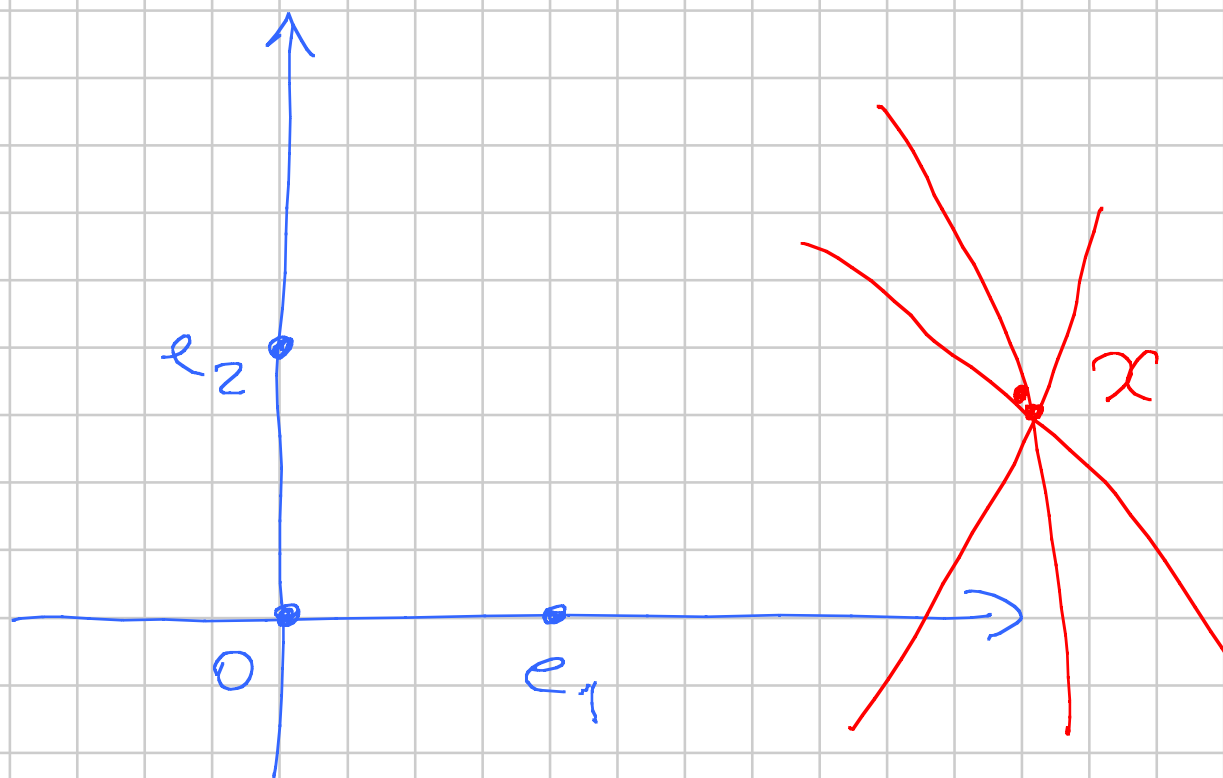
in tal caso

scriviamo f

con $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = f$



One has $f(0) = 0$, $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$



$$\Rightarrow f(x) = x$$

