Geometrie 11/4/18

Teo: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simm

$\Rightarrow \exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Prop: A simm.

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. $\Leftrightarrow$ A ha autoval > 0

Dim: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def pos

$\Longleftrightarrow \langle x | x \rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0$ $\qquad (x = My)$

$\Longleftrightarrow \langle My | My \rangle_A > 0 \quad \forall y \neq 0$

$\Longleftrightarrow {}^t(My) \cdot A \cdot My > 0 \quad \forall y \neq 0$

$\Longleftrightarrow {}^t y \cdot {}^t M \cdot A \cdot M \cdot y > 0 \quad \forall y \neq 0$

$$\iff {}^t y \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot y > 0 \quad \forall y \neq 0$$

$$\iff \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0 \quad \forall y \neq 0$$

$$\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0. \qquad \blacksquare$$

<u>Oss</u>: per $n \geq 3$ calcolare gli autoval. di A può essere difficile: criterio difficile da applicare.

Criterio efficace:

chiamo $A = \begin{pmatrix} A_k & * \\ \underbrace{*}_{k} & * \end{pmatrix} \Big\}k$

e $d_k = \det(A_k)$.

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. $\Longleftrightarrow$ $d_1, \dots, d_n > 0$.

$\underline{Es}$: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ def. pos $\iff$ $\underset{\substack{\parallel \\ d_1}}{a > 0}$, $\underbrace{ac - b^2}_{d_2} > 0$

$\underline{Es}$: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ è def. pos. ?

$\underline{d_1 = 1 > 0}$ $\quad$ $\underline{d_2 = 10 - 9 = 1 > 0}$

$d_3 = 70 - 6 - 6 - 10 - 63 - 4 < 0$ $\quad$ $\underline{\underline{No}}$

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def. pos. su $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \langle \cdot | \cdot \rangle_{A_k}$ def. pos. su $\mathbb{R}^k$

$\Rightarrow A_k$ ha tutti autoval. pos.

$\Rightarrow d_k > 0$ perché è il prodotto degli autovalori.

$\Leftarrow$ Suppongo $d_1, \dots, d_n > 0$; dimostro per induz. su k che A_k ha tutti gli autoval > 0

Per $k = n$ ho la conclusione voluta.

Passo base: $A_1 = (a_{11})$ $\quad d_1 = a_{11} > 0$

$\langle x_1 | x_1 \rangle_{A_1} = a_{11} \cdot x_1^2$ è def pos.

Passo induttivo: suppongo $k < n$ e che

A_k ha tutti gli autoval >0, cioè $\langle \cdot | \cdot \rangle_{A_k}$ è def. pos. su $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$.

Voglio vedere che anche A_{k+1} è def. pos. cioè ha tutti gli autoval >0; so che $d_{k+1} > 0 \Longrightarrow$ il prodotto degli autoval di A_{k+1} è >0; se ci sono autoval neg. ce ne sono almeno 2; se prendo

$W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ - w_j autovett. di A_{k+1} rispetto a $\alpha_j < 0$

ho che se $w = z_1 w_1 + z_2 w_2$

$$\langle w | w \rangle_{A_{k+1}} = \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 < 0 \quad \forall z \neq 0$$

Dunque in $\mathbb{R}^{k+1}$ ho:

$\mathbb{R}^k \times \{0\}$, $\dim = k$, $\langle x | x \rangle_{A_{k+1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k \times \{0\}, x \neq 0$

W, $\dim = 2$, $\langle x | x \rangle_{A_{k+1}} < 0 \quad \forall x \in W, x \neq 0$

$k+2 > k+1 \Rightarrow W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ ha dim ≥ 1.

Assurdo. $\blacksquare$

<u>Teo</u>: data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simm se $d_1, \dots, d_{n-1} \neq 0$ allora i segni degli autoval. di A sono i segni di $d_1, \frac{d_2}{d_1}, \frac{d_3}{d_2}, \dots, \frac{d_n}{d_{n-1}}$.

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$d_1 = -1 < 0$ $\quad d_2 = -13 < 0$

$d_3 = -20 + 6 + 6 - 16 - 45 + 1 < 0$

$\Rightarrow$ D è segni degli autoval. di A (contati con molt.)

sono

$-, +, +$ cioè due pos. e uno neg.

<u>Idea dimo</u>: per induz. provo la tesi per A_k.

Passo base ok. Esempio di passo induttivo.

da $k=5$ a $k=6$:

Suppongo $d_j = + - - + - +$

Ip. ind.: autovol A_5 $+ - + - -$ ⊛

Tesi ind.: autoval A_6 $+ - + - - -$

⊛ $\exists\, W$ $\dim(W)=2$ t.c. $\langle x|x\rangle_A > 0$ $\forall x \in W, x \neq 0$

$\exists\, Z$ $\dim(Z)=3$ t.c. $\langle x|x\rangle_A < 0$ $\forall x \in Z, x \neq 0$

$d_6 > 0 \Longrightarrow$ gli autoval di A_6 possono essere:

$- \; - \; - \; - \; - \; - \longrightarrow$ impossibile

$- \; - \; - \; - \; + \; + \longrightarrow$ contenti

$- \; - \; + \; + \; + \; + \longrightarrow \exists\, U,\ \dim U = 4$ t.c.

$+ \; + \; + \; + \; + \; + \longrightarrow$ imp. $\quad \langle x(x) \rangle_A > 0 \quad \forall x \in U,\ x \neq 0$

$4 + 3 > 0 \Longrightarrow Z \cap U \neq \{0\}$

impossibile $\blacksquare$

Versione complessa del teo. spettrale

Def: ricordo che $A^* = {}^t\bar{A}$

$$\left(\begin{pmatrix} 4-i & 3+2i \\ 5-7i & 2+8i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 4+i & 5+7i \\ 3-2i & 2-8i \end{pmatrix}\right).$$

Chiamo A normale se

$$A^* \cdot A = A \cdot A^*.$$

Oss: sono normali:

- hermitiane (dunque le reali simm.)

$$A^* = A \Longrightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = A^2$$

- antihermitiane (dunque le reali antisimm.)

$$A^* = -A \Longrightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = -A^2$$

- unitarie (dunque le ortogonali reali)

$$A^* = A^{-1} \Longrightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = I_n$$

- ALTRE.

Teo: A normale $\Longleftrightarrow$ si diagonalizza via unitaria

(cioè: $\exists M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ t.c.

$$M^* = M^{-1} \quad e \quad M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

cioè: A ammette una base ortonormale di autovettori).

Dim: $\Leftarrow$ Segue da questi fatti:

- $A = M \cdot D \cdot M^{-1}$ con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, M unitaria

- D diago $\Longrightarrow$ D normale

$$D^* \cdot D = \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot D^* = \cdots\cdots \qquad \qquad //$$

- Se B è normale e N è unitaria allora $N \cdot B \cdot N^{-1}$ è normale : so che

$$B^* B = B B^* \,, \qquad N^* = N^{-1}$$

$$(N\cdot B\cdot N^{-1})^* \cdot (N\cdot B\cdot N^{-1}) \overset{?}{=} (N\cdot B\cdot N^{-1})(N\cdot B\cdot N^{-1})^*$$

$$(N\cdot B\cdot N^*)^*(N\cdot B\cdot N^*)$$

$$\|$$

$$\underbrace{N^{**}}_{N}\cdot B^*\cdot \underbrace{N^*\cdot N}_{I_n}\cdot B\cdot N^*$$

$$(N\cdot B\cdot N^*)(N\cdot B\cdot N^*)^*$$

$$\|$$

$$N\cdot B\cdot N^*\cdot \underbrace{N^{**}}_{N}\cdot B^*\cdot N^*$$

$$\underbrace{B^* \cdot B} \qquad\qquad \underbrace{B \cdot B^*}_{} = I_n$$

$\Longrightarrow$ Suppongo A normale. Scelgo $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ autoval e u_1 autovett. relativo, con $\|u_1\| = 1$.

Completo u_1 a base $(u_1, \dots, u_n) = N$ ortonormale di $\mathbb{C}^n$ (cioè N unitaria):

$$N^{-1} \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & w_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Per ultimo punto sopra ho che $\begin{pmatrix} \lambda_1 & w_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ è normale

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ {}^t\bar{w}_1 & A_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & w_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & w_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ {}^t\bar{w}_1 & A_1^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots \\ \dots & {}^t\bar{w}_1 \cdot w_1 + A_1^* \cdot A_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 + \|w_1\|^2 & \dots \\ \dots & A_1 \cdot A_1^* \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow w_1 = 0$, A_1 è normale. Scoperto:

$$N^{-1} \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \qquad A_1 \text{ normale}$$

Facile conclusione per induzione. $\blacksquare$

$\boxed{9.5.1 \ (a)}$ $v \in \mathbb{C}^2$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ unitario, ortog $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$ e I coord. reale.

Come con Carlo: $v = \begin{pmatrix} x \\ y+iz \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x(3+i) + (y+iz)(2-5i) = 0 \end{cases}$$

Invece: prima cerco v con I coord. reale e ortog. a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$ e osservo che se poi sostituisco v con $\frac{v}{\|v\|}$ non perdo la due condiz. già realizzate.

quindi cerco: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c.

$$1 \cdot (3+i) + \alpha \cdot (2-5i) = 0$$

$$\alpha = -\frac{3+i}{2-5i} = -\frac{(3+i)(2+5i)}{4+25}$$

$$= -\frac{6-5+2i+15i}{29} = -\frac{1+17i}{29}$$

$\Rightarrow$ va bene $v = \begin{pmatrix} -29 \\ 1+17i \end{pmatrix}$; resta da normalizzare : $v = \frac{1}{\sqrt{29^2+1+17^2}} \cdot \begin{pmatrix} -29 \\ 1+17i \end{pmatrix}$

solo loro vanno bene perché

- l'ortog. a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$ si preserva moltiplicando per numeri
- la norma 1 si preserva molt. per numeri di modulo 1

* I campo reale di preserva molt. per numeri reali

$\Longrightarrow$ vanno bene solo I 1.

$\boxed{(e)}$ $\mathbb{C}^2$, $\langle . | . \rangle_{\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix}}$ unitario,

ortog a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$, somma coord. imm. pura.

Somma coord. imm. pure: $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ k-\alpha \end{pmatrix} i$

ortog a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$ rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix}}$

(trovo α)

Resterà da normalizzare e prendere $\perp$ (come sopra).

$$\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ i-\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$(1+3i,\ 2-i) \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ i-\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+3i+4-4i-1 \, , & 2+i+6i-3+14-7i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ i-\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4-i \, , & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ i-\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$4\alpha - i\alpha + 13i - 13\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{13i}{9+i} = \frac{13(9-i)}{82} = \frac{117-13i}{82}$$

Per ultimo due condiz. va bene $\begin{pmatrix} 117-13i \\ 82i-117+13i \end{pmatrix}$

$$v = \begin{pmatrix} 117 & -13i \\ 95i & -117 \end{pmatrix}$$

Ora vanno bene $\pm \dfrac{v}{\|v\|_A}$

$$\|v\|_A^2 = (117+13i, -95i-117) \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 117-13i \\ 95i-117 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

$\boxed{(g)}$ $V = \mathbb{C}^3$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^3}$

unitario, somma coord. reale, ortog a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 3-i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3+i \\ -2i \\ 1-i \end{pmatrix}$

Conviene: prima trovare un vett $\perp$ ai due dati (d'ora in poi posso moltiplicare per numeri); moltiplico per numero affinché somma coord.

sia reale (d'ora in poi posso moltiplicare per numeri reali); normalizzo ... ±

Ricordo: in $\mathbb{R}^3$ i vett. $\perp$ a u, v sono i multipli di $u \wedge v$ (regola dei det 2×2)

In $\mathbb{C}^3$ devo usare la stessa regola dei det 2×2 ma poi coniugare:

I vettori $\perp$ a

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 3-i \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3+i \\ -2i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

sono i multipli di

$$\begin{pmatrix} 2+6i+2 \\ -2+2i+10 \\ -4i-2-4i \end{pmatrix}$$

ovvero i multipli di

$$\begin{pmatrix} 2-3i \\ 4-i \\ -1+4i \end{pmatrix}$$

Somma coord. = 5 è già reale
(se no moltiplicavo per suo coniugato) —

Conclusione

$$\pm \frac{1}{\sqrt{4+9+16+1+4+16}} \begin{pmatrix} 2-3i \\ 4-i \\ -1+4i \end{pmatrix}.$$