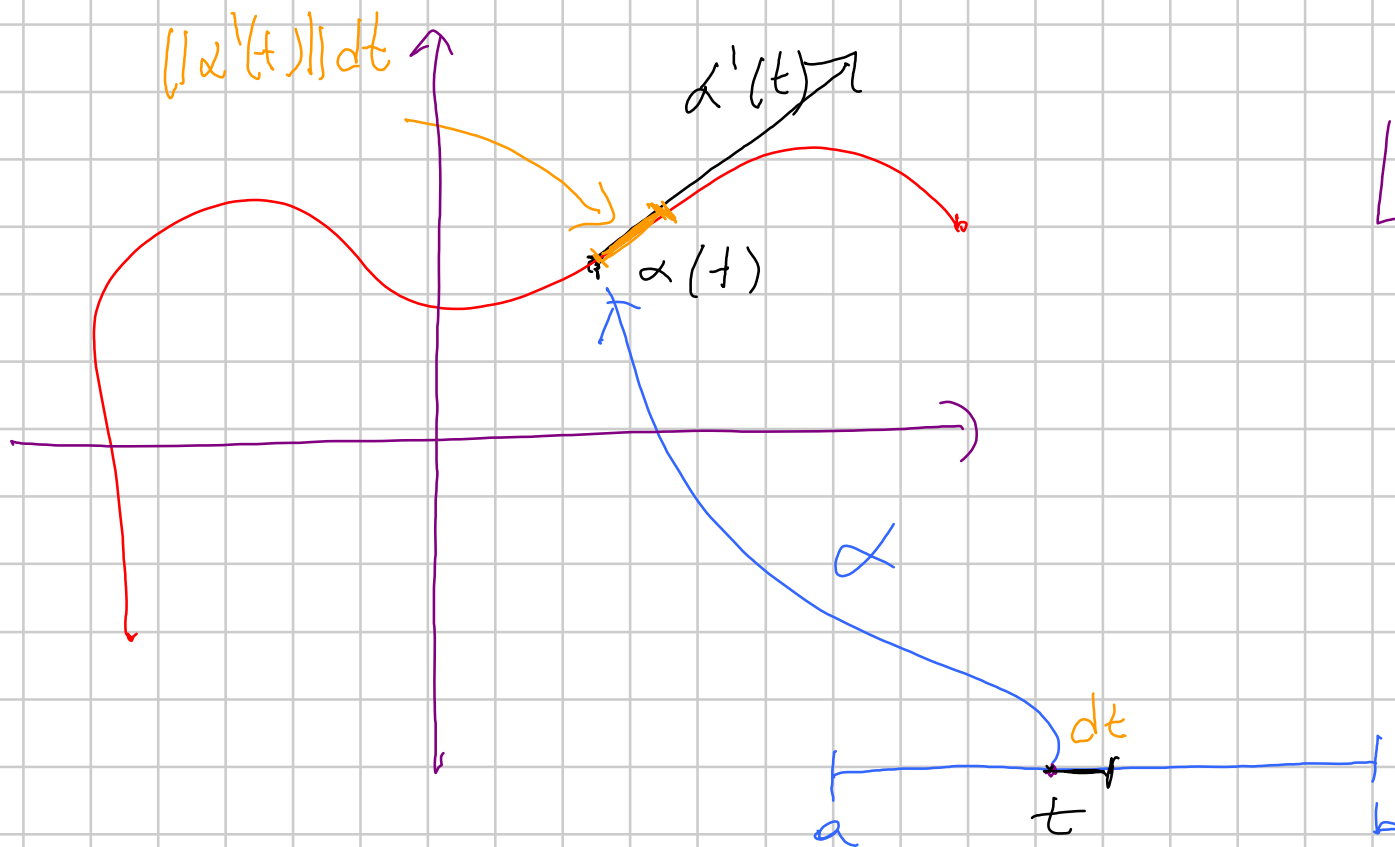
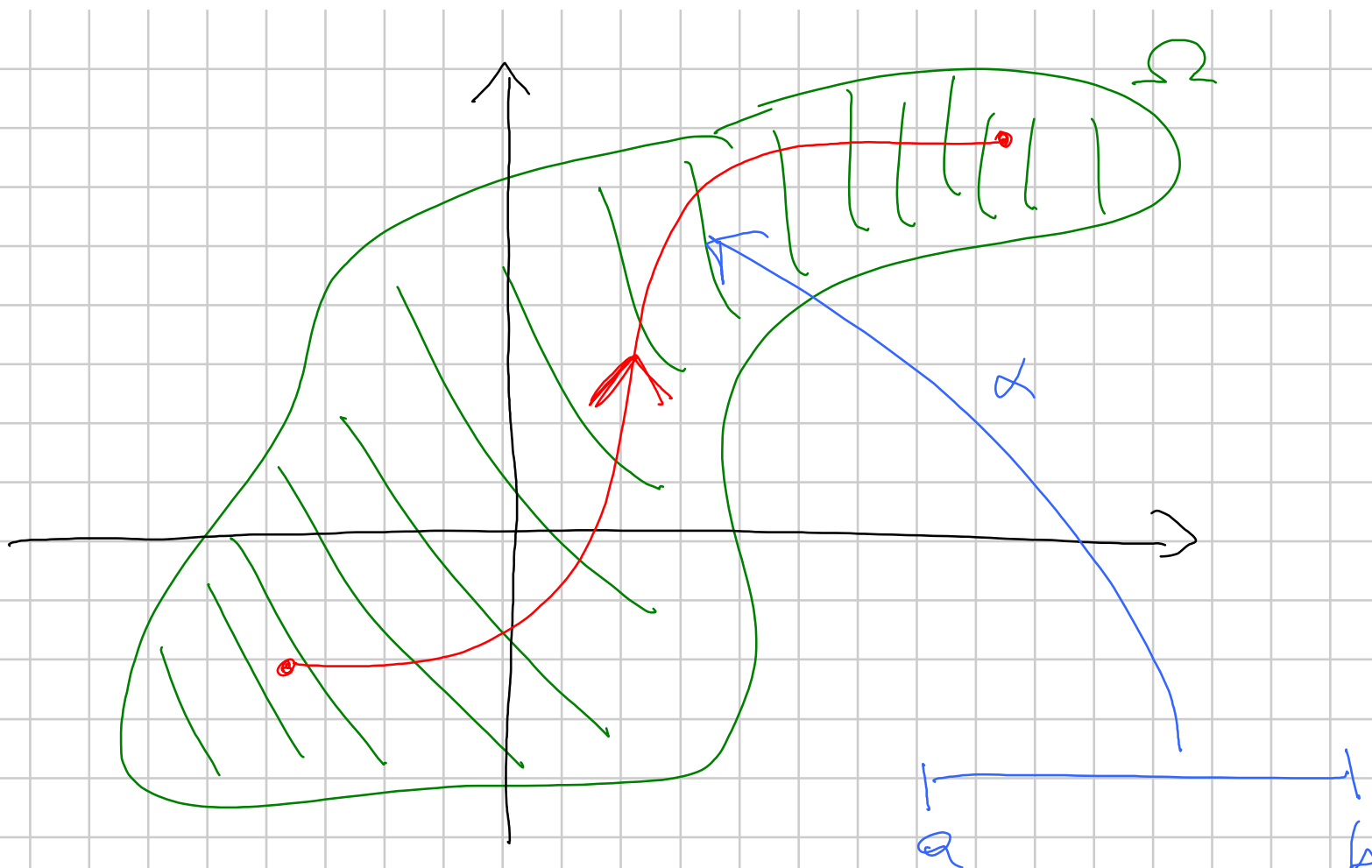


Geometria 10/5/18



$$L(\alpha) = \int_a^b \underbrace{\|\alpha'(t)\|}_{\text{elemento di lunghezza } \alpha} dt$$

elemento di
lunghezza α
 $\|\alpha'(t)\|$



$$\Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x,y)$ = "costo" per
 percorrere nel
 punto (x,y) un
 elemento unitario.
 di lunghezza

Costo complessivo per percorrere α

$$\int_a^b \underbrace{f(\alpha(t))}_{\text{pesato con il costo unitario nel punto}} \cdot \underbrace{\|\alpha'(t)\| dt}_{\text{elem. di length.}}$$

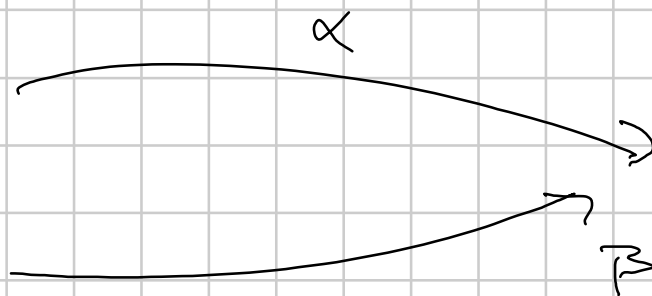
Def: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha: [a, b] \rightarrow \Omega$
chiamo integrale su α di f :

$$\int_{\alpha} f = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt,$$

Prop: se α, β parametrizzano la stessa curva
 allora $\int_{\alpha} f = \int_{\beta} f$ (in part. $L(\alpha) = L(\beta)$).

Dica:

$$\begin{array}{c} [a, b] \\ \uparrow \tau \\ [c, d] \end{array}$$



$$\beta(s) = \alpha(\tau(s))$$

τ bijective

$$\int_{\beta} f = \int_c^d f(\beta(s)) \cdot \underbrace{\|\beta'(s)\|}_{=}$$

$$\alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$$

$$= \int_c^d f(\underbrace{\alpha(\tau(s))}_t) \cdot \underbrace{\|\alpha'(\tau(s))\|}_t \cdot \underbrace{|\tau'(s)|}_{dt} ds$$

$$t = \tau(s)$$

$$dt = |\tau'(s)| \cdot ds$$

$$= \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt = \int_a f.$$



ATTENZIONE Se f è una funzione scalare

$$\int_a f = \int f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt$$

Def: $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta in
parametro d'arco se $\|\alpha'(t)\| = 1 \quad \forall t$.

Prop: ogni curva si può riparametrizzare
in parametro d'arco.

Date: $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ | regolare (sempre)
t.c. $\|\alpha'\| \equiv 1$, | arco $\beta = \alpha \circ \tau$
Usa lo spazio percorso

per misurare il tempo:

$$\sigma(t) = \int_a^t \|x'(u)\| du$$

← spazio percorso
nel tratto di x
parametrizzato
in $[a, t]$

$$\sigma: [a, b] \rightarrow [0, L]$$

$$L = L(x)$$

$$\sigma'(t) = \|x'(t)\| > 0 \quad (\text{Teo Fond Calc Int})$$

$\Rightarrow$ crescente $\Rightarrow$ invertibile

$$\tau = \sigma^{-1} : [0, L] \longrightarrow [a, b]$$

$$\beta = \alpha \circ \tau$$

$$\beta'(t) = \alpha'(\tau(t)) \cdot \tau'(t)$$

$$= \alpha'(\tau(t)) \cdot \frac{1}{\sigma'(\tau(t))}$$

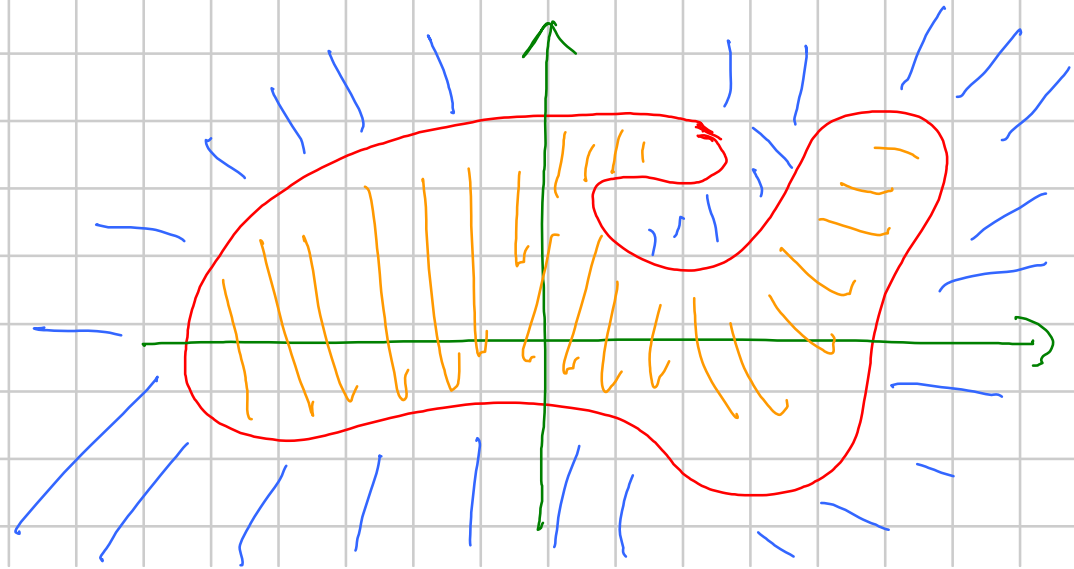
$$= \alpha'(\tau(t)) \cdot \frac{1}{\|\alpha'(\tau(t))\|}$$

$$\Rightarrow \|T'(x)\| = 1.$$



Fatto intuitivo: se α curva in $\mathbb{R}^2$
semplice e chiusa:

allora α separa $\mathbb{R}^2$
in due regioni, una

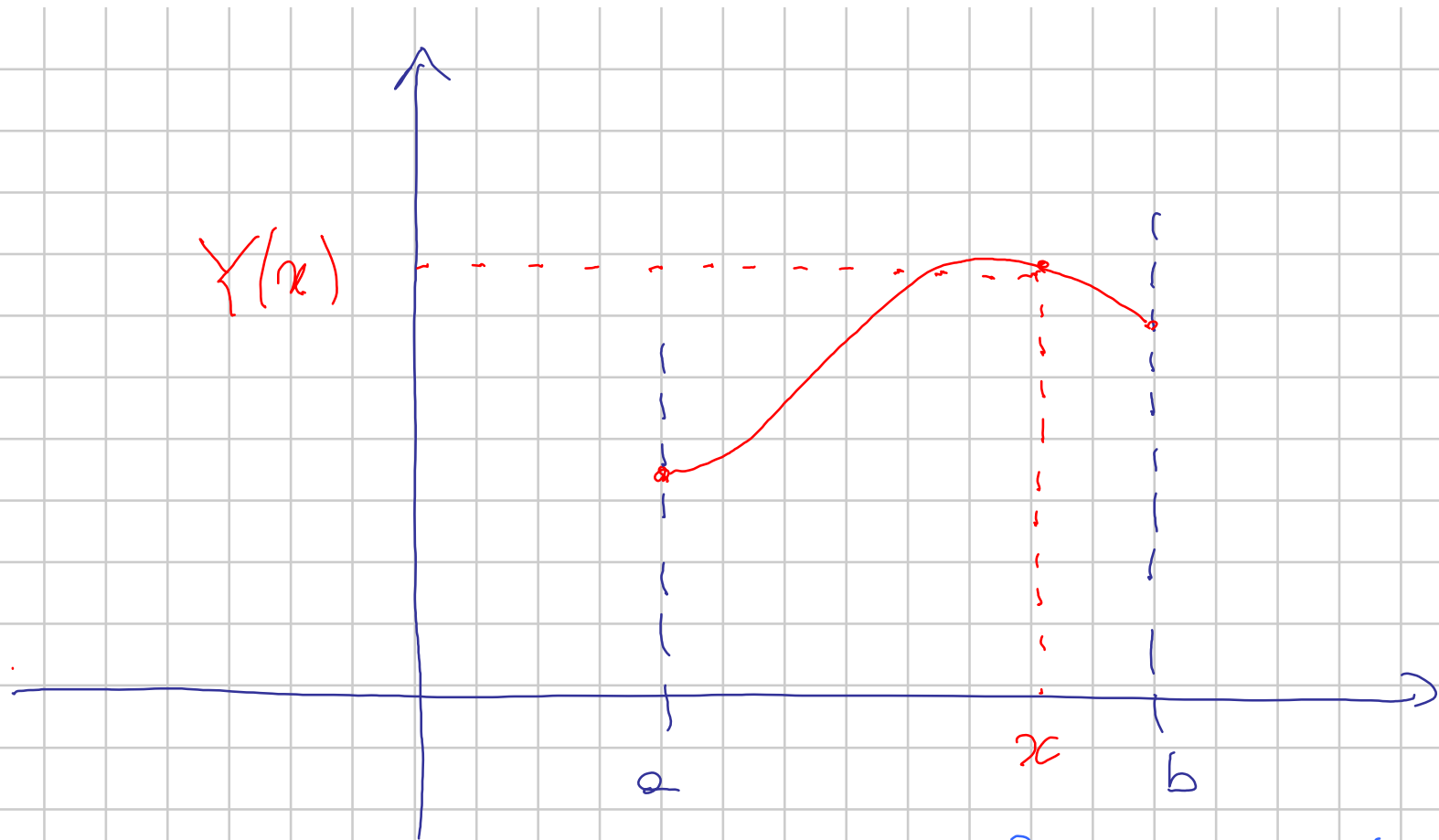


limitata e non no.

Teorema di Jordan (vale anche se α è solo
continua: difficile)
(falso in dimensioni più alte) -

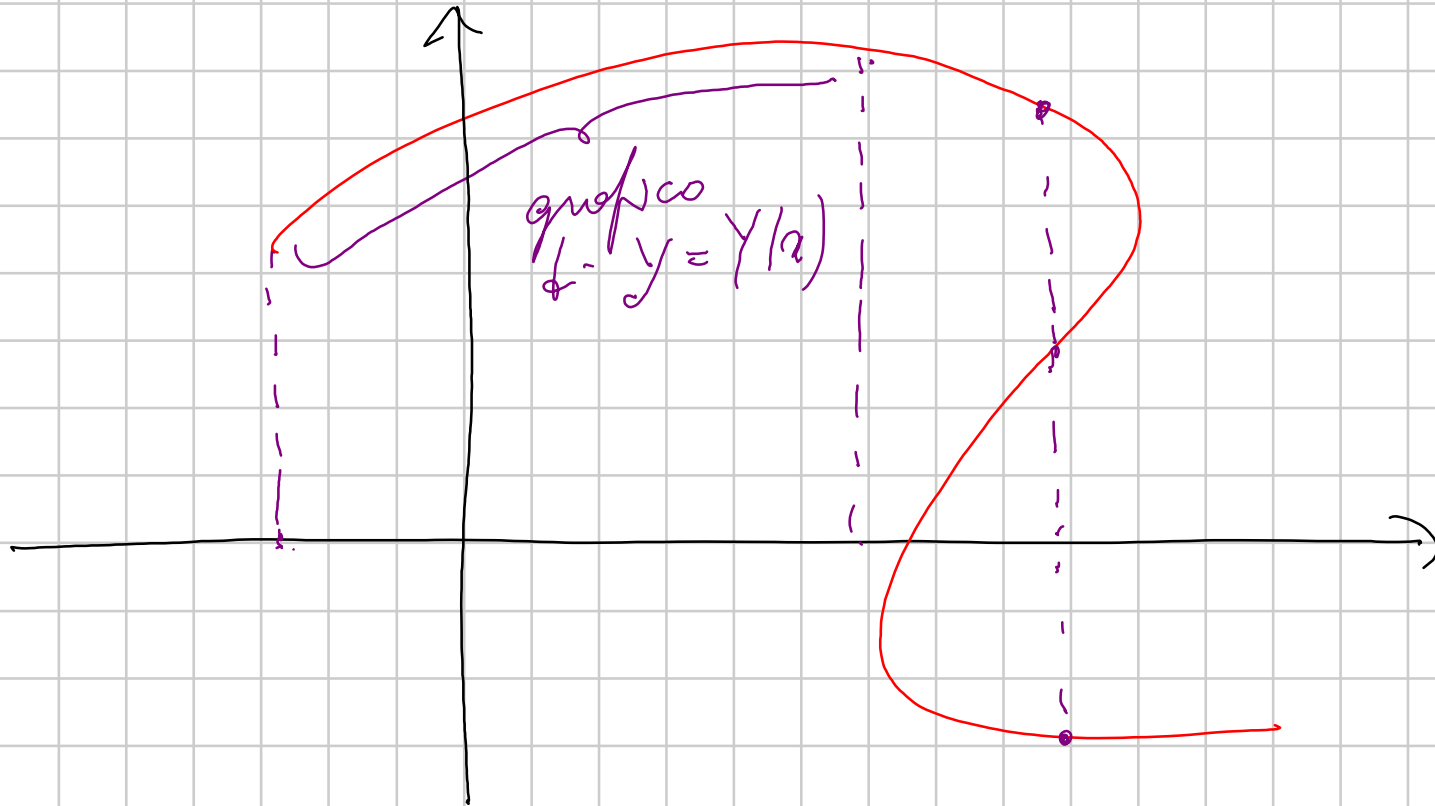


Oss: il grafico di una funzione $y = Y(x)$
oppure $x = X(y)$ è sempre una curva:



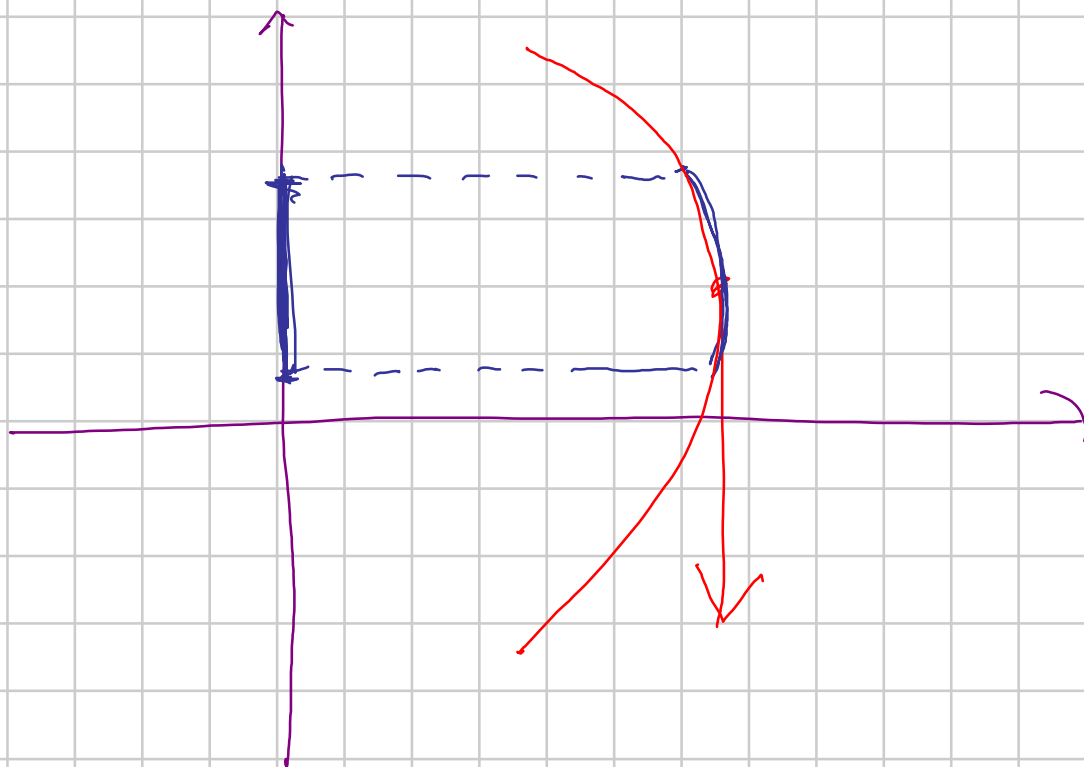
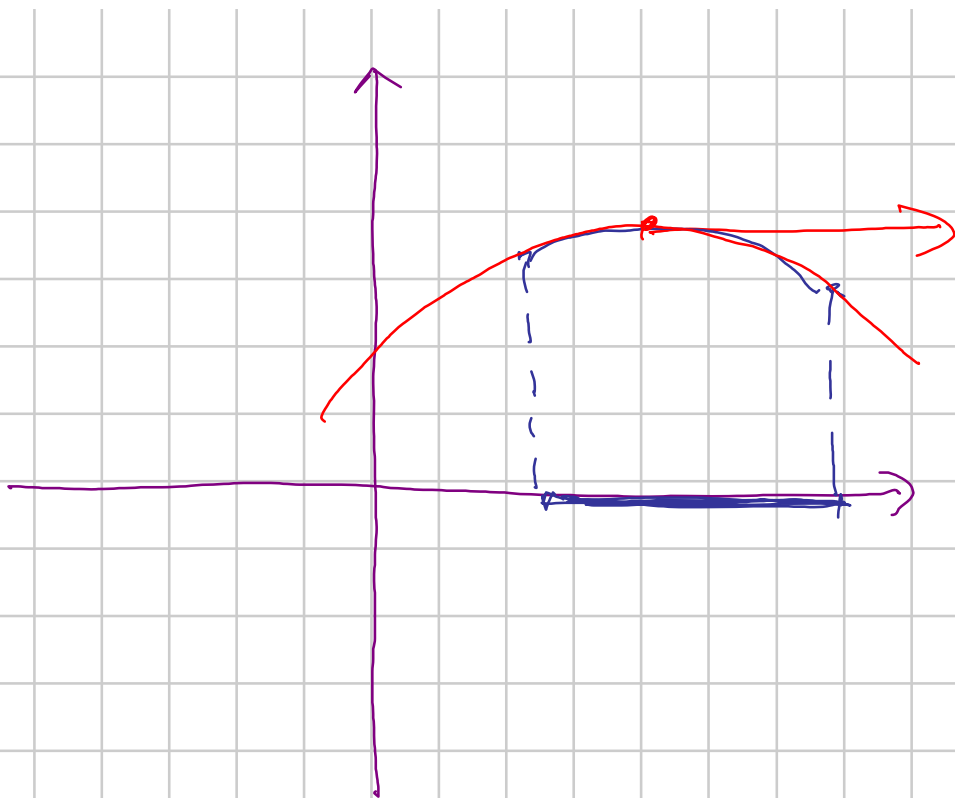
parametrizace $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, Y(t))$.

Un'iperbole non è un grafico:



Pero: ogni curva è localmente un grafico
di $y = Y(x)$ oppure di $x = X(y)$!

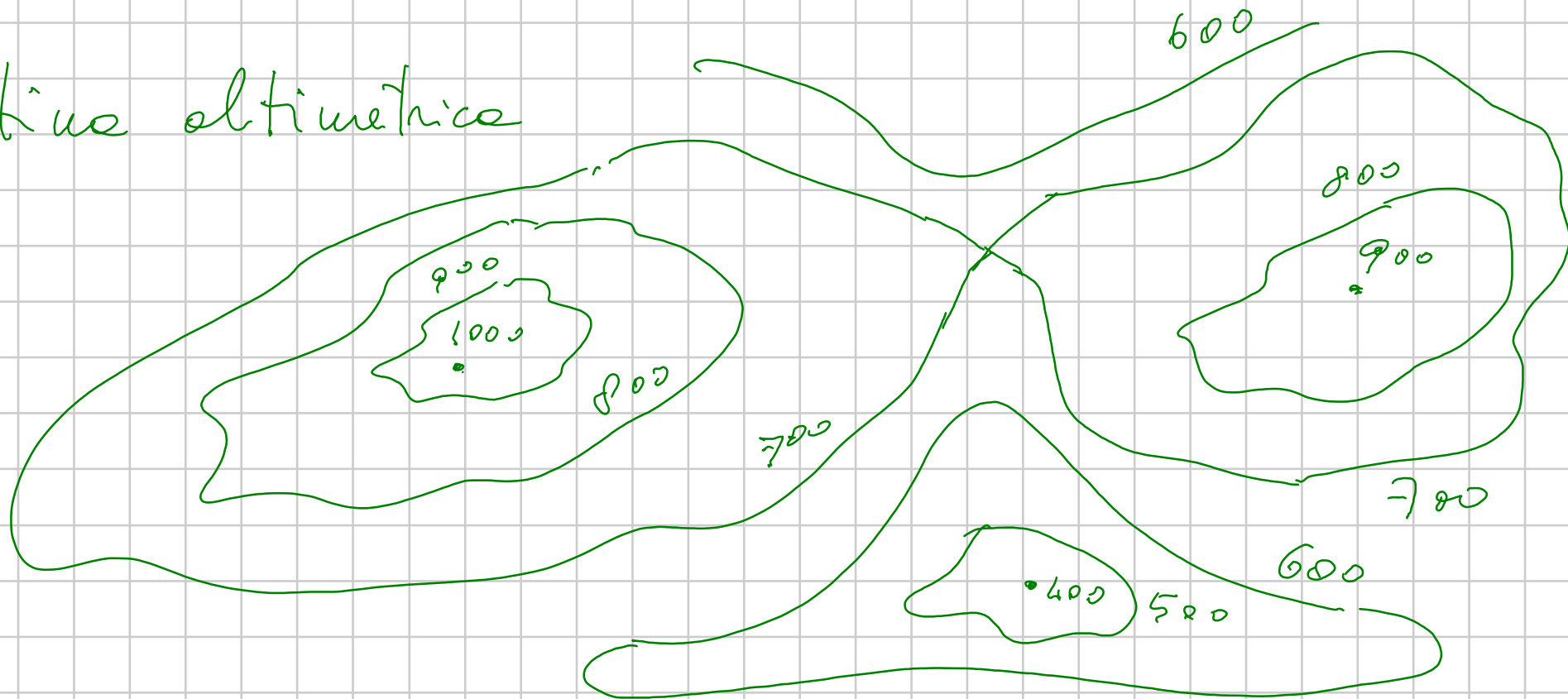


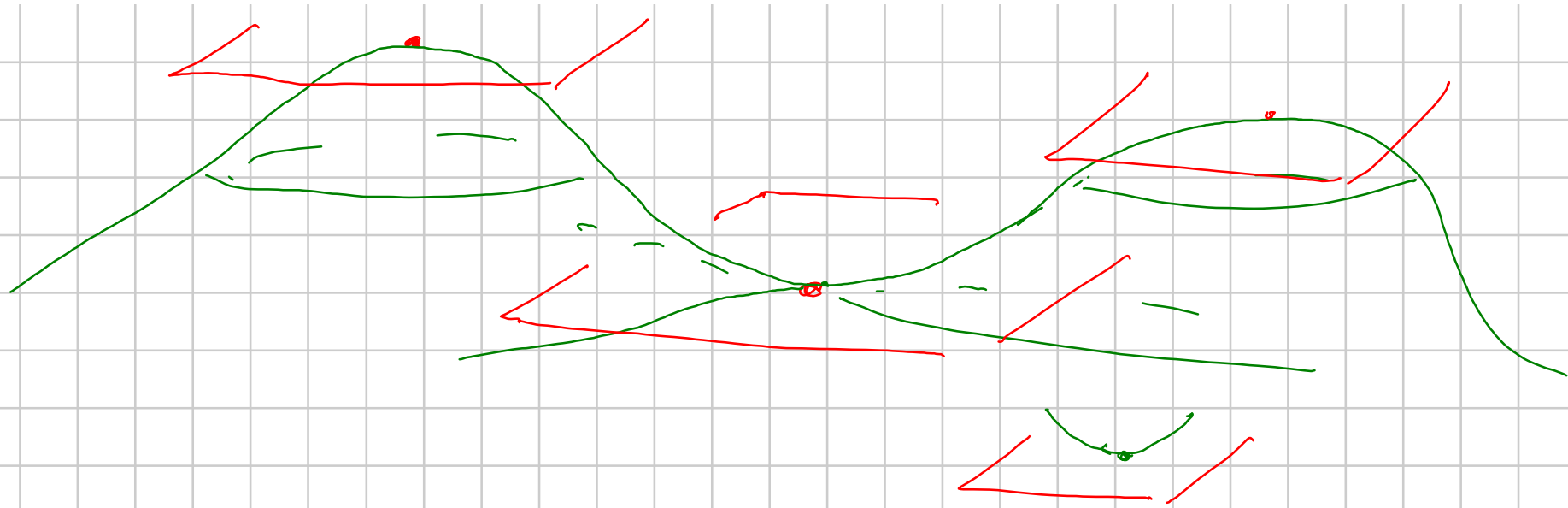


← ○ →

Curve di livello di funzioni

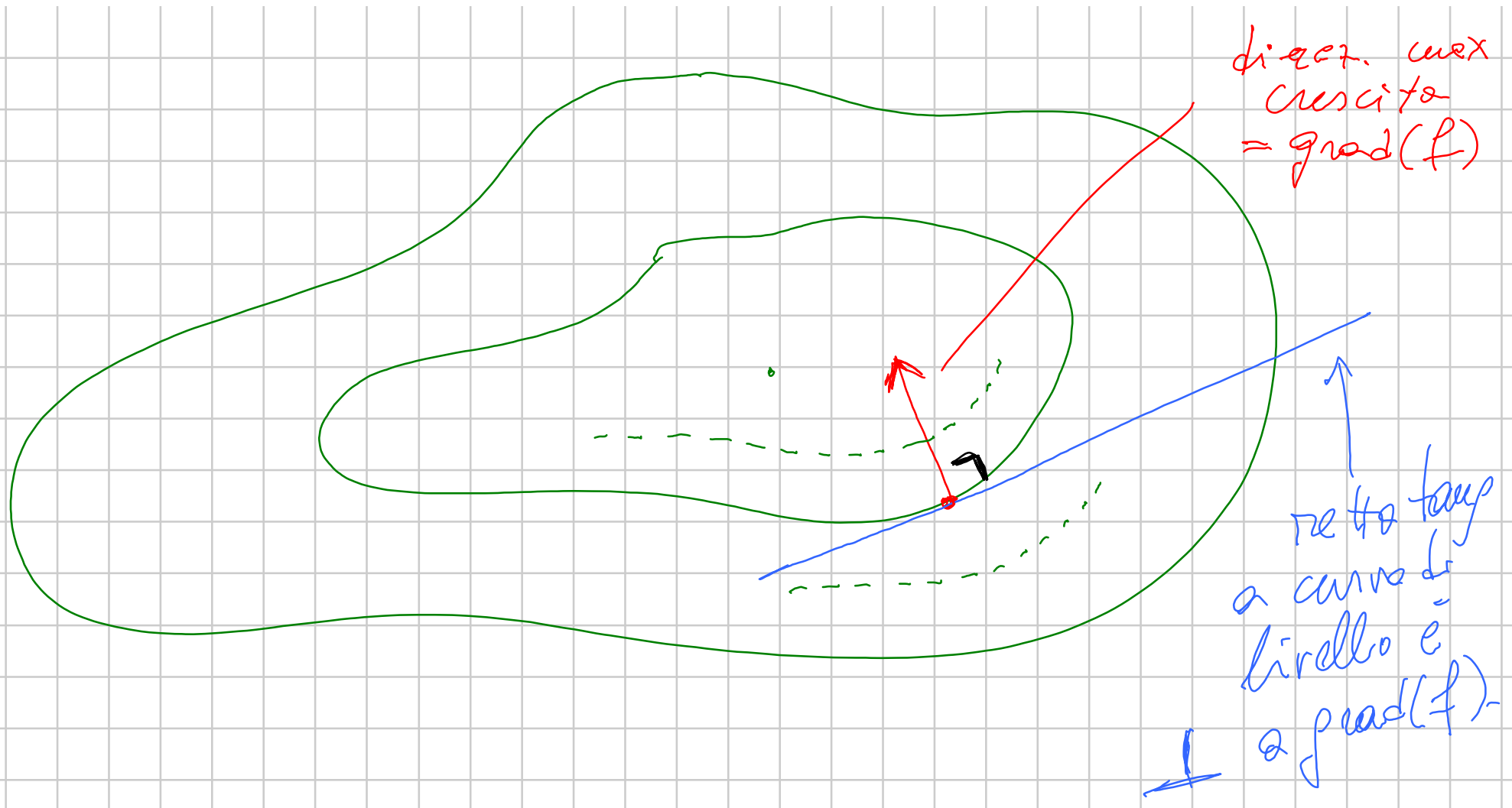
Cartina altimetrica





Teo : se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile
 $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$ e in un pto (x_0, y_0) ho
 $\text{grad}(f)(x_0, y_0) \neq 0$ allora l'insieme di

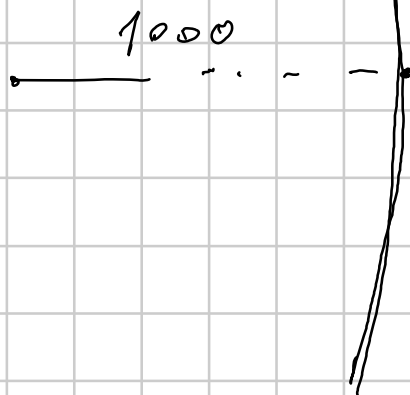
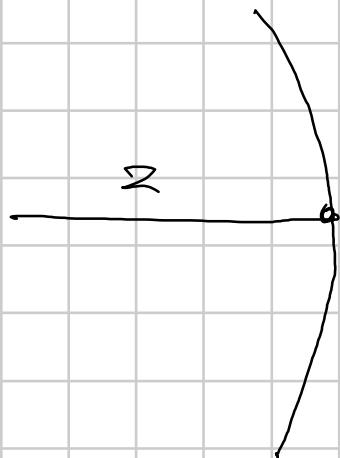
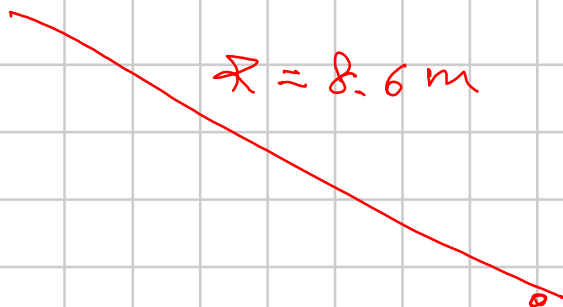
livello di f nel pto (x_0, y_0) è una curva vicino a (x_0, y_0) con vettore tangente perpendicolare a $\text{grad}(f)(x_0, y_0)$ -



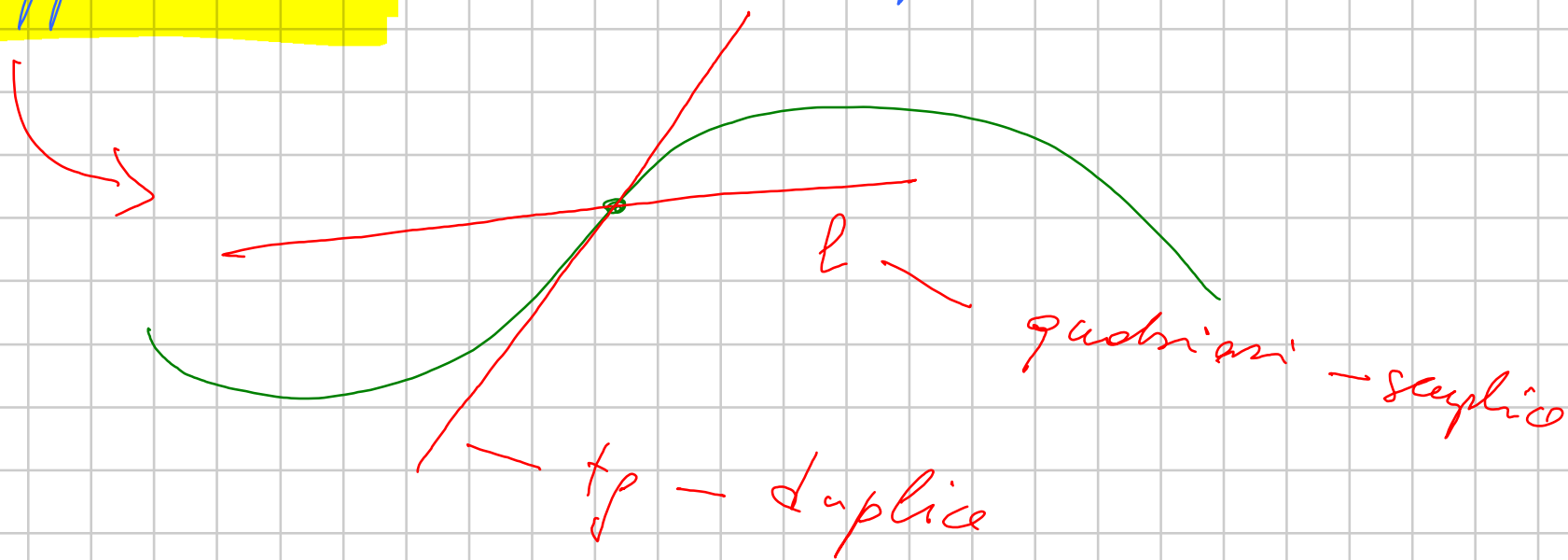
Curvatura

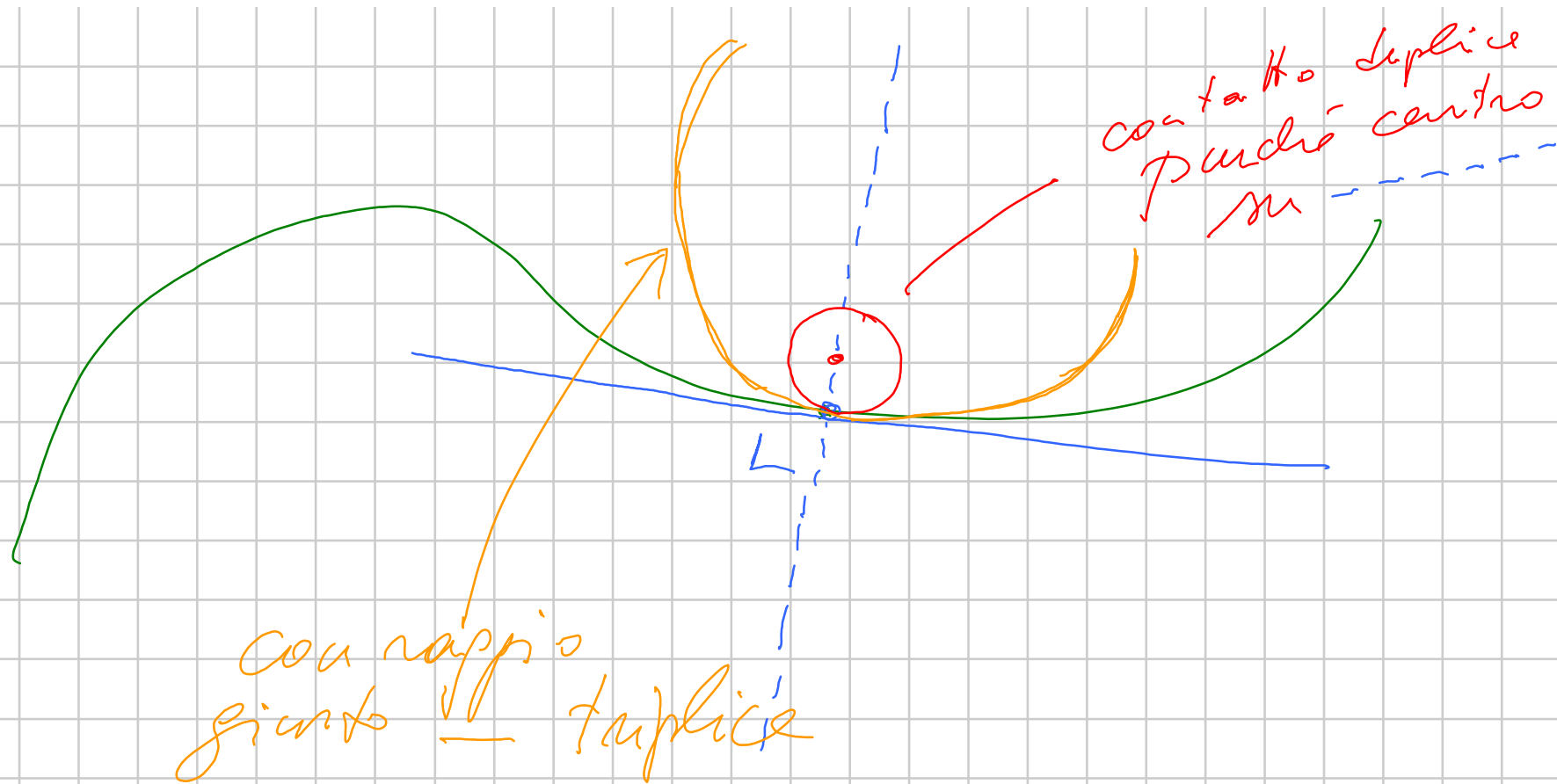
misura di quanto una curva non è dritta.

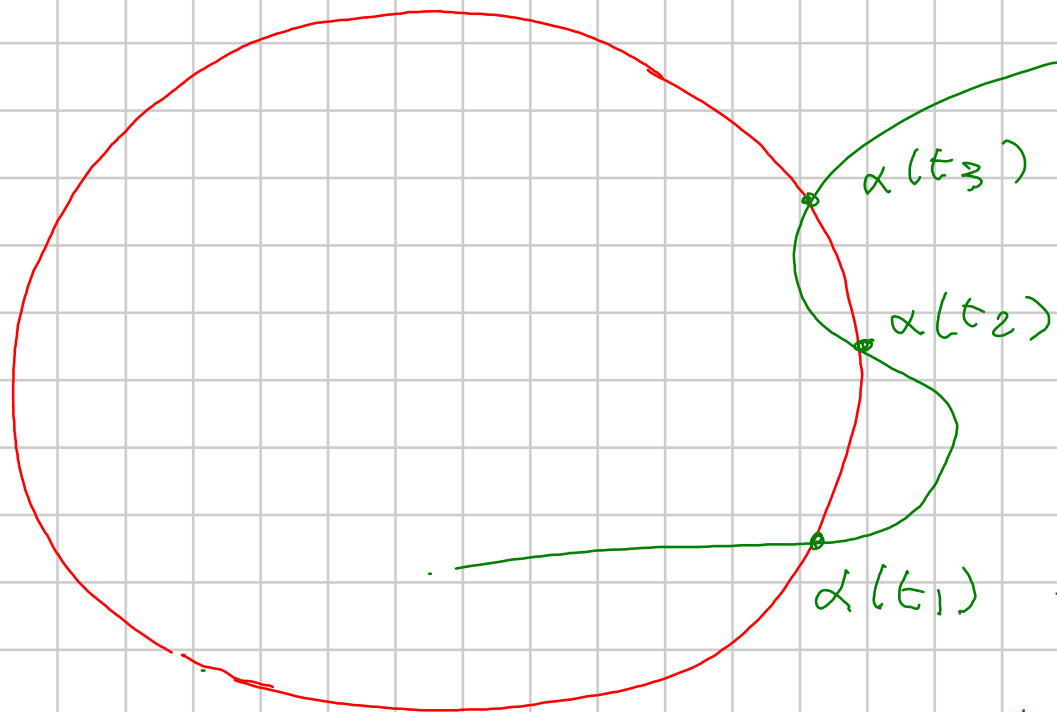




Misure di quanto $\propto$ è curva nel pto $\alpha(t)$
= reciproco del raggio della circonf. che
meglio approssima $\propto$ nel pto $\alpha(t)$.







$t_1, t_2, t_3 \rightarrow t_0$

$\Rightarrow$ le contour par $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ fermé

all'vice con contatto tangente con α .

la funz. det. tra $\alpha(t)$
e la circonf. si
annulla insieme a I
e II derivata -

11.2.3

©

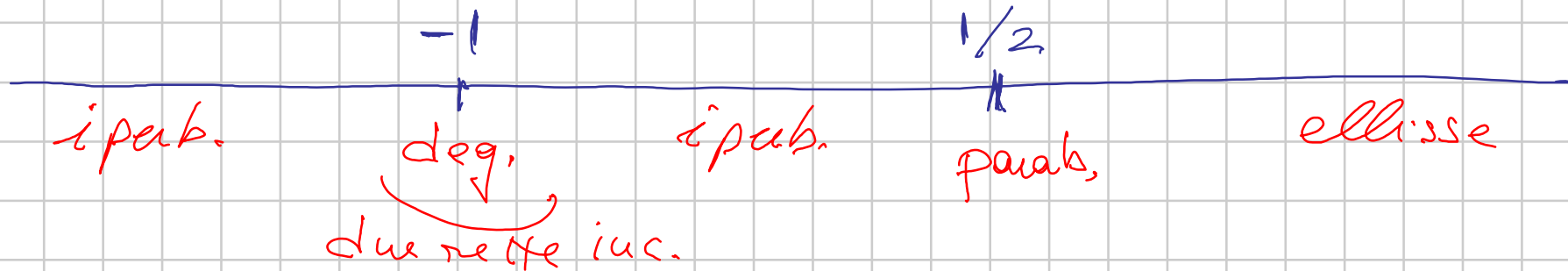
$$x^2 - 2xy + 2ky^2 + 2kx + 2y + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & 2k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 > 0$$

$$d_2 = 2k - 1$$

$$d_3 = 2k - k - k - 2k^3 - 1 - 1 \\ = -2(k^3 + 1)$$



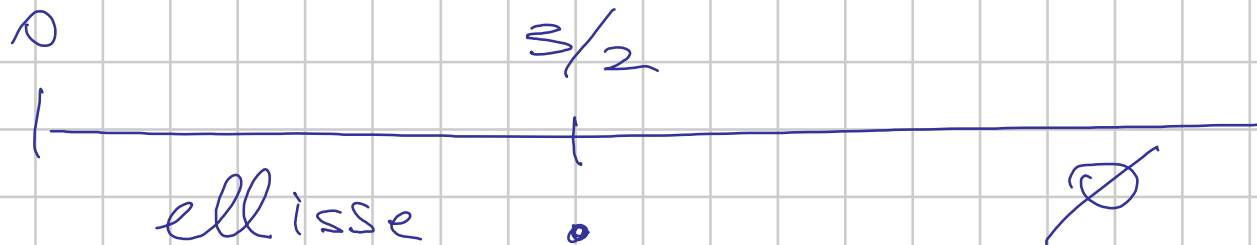
⑧ $kx^2 + 2\sqrt{k}xy + 3y^2 + 2\sqrt{k}x + k = 0 \quad (k > 0)$

$$\begin{pmatrix} k & \sqrt{k} & \sqrt{k} \\ \sqrt{k} & 3 & 0 \\ \sqrt{k} & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 3 > 0$$

$$d_2 = 3k - k = 2k > 0$$

$$d_3 = 3k^2 - 3k - k^2 \\ = k(2k - 3)$$



Dira se la relatz. data e rifl/symm/antisymm/trans.

12.1.2 $\mathbb{Z}$

(a) $|m| = |m|$

(b) $|m| < |m|$

(c) $|m| < m^2$

equiv. (no antisymm
(antisymm) trans

refl :

no : $0, \pm 1$

symm :

$m = 1$

$m = 2$

no

antisymm : No $n=2$ $m=3$

trans: No

$$|m| < m^2, |m| < k^2 \not\Rightarrow |m| < k^2$$

$$n=8, m=3, k=2$$

12.1.3

$X = \text{popolez. mondiale}$

(b) essai consanguineo

diff, symm, no antisym
no trans -

(c) avere discendente comune *diff.*, *si un*, *no action*
no /ram

12.1.4 $X = \text{italiani con 1 telefono}$

(a) avere stesso padre *equiv.*

(c) $x R y$ se IV cifre del numero di x multiple delle
VII cifre del numero di y .

right : no

3 4 2 1 7 2 9 5 4 3
... ↑ ... ↑

simon : no

antisim : no

trans : no - - -

12.1.5

$$X = \{0, \dots, 9\}$$

$d(m)$ = i tratti con cui
si scrive m in

$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$

(a) nRm so $d(m) \subseteq d(n)$

split ; no sum

$R \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$

aufsummen ; trans.

$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$

$\tilde{A}$

$\Rightarrow$ ordine

(b) mRm se $d(m)$ e $d(m)$ hanno stesso numero di elementi.

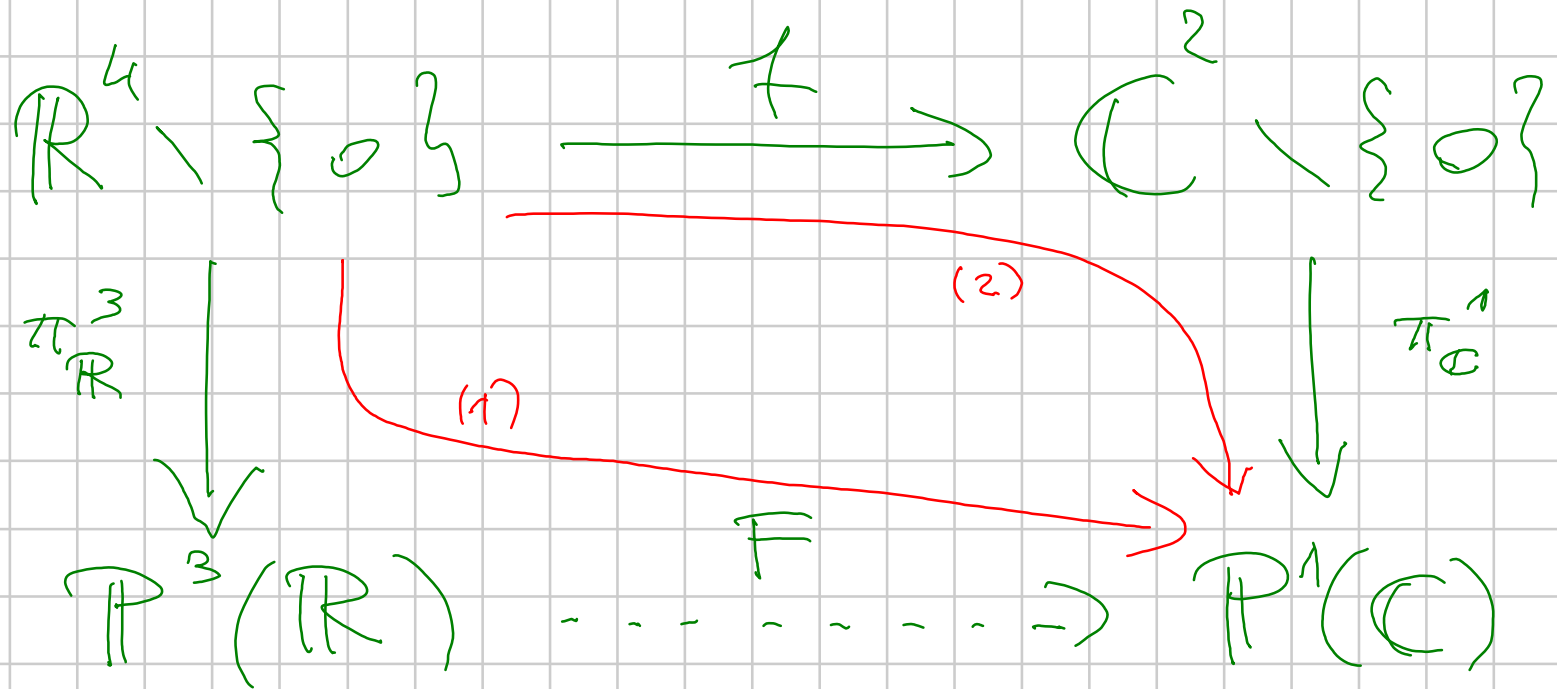
equivalenza; antisisim: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ no

12.2.1 Consideriamo $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ x + iy \end{pmatrix}.$$

Prova che $f: \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ induce

una funzione $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ surgettiva
 ma non iniettiva.



Vorrei definire F in modo che $\underbrace{F \circ \pi_{\mathbb{R}}^3}_{(1)} = \underbrace{\pi_{\mathbb{C}}^1 \circ f}_{(2)}$

Cioè vorrei definire $F\left([v]_{\mathbb{P}^3(\mathbb{R})}\right) = [f(v)]_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$.

Perché è ben definita? Se uso $w \in [v]_{\mathbb{P}^3(\mathbb{R})}$

invece di v ho $w = \lambda \cdot v \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(w) = \lambda \cdot f(v) \quad \lambda \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\Rightarrow [f(w)]_{P'(C)} = [f(v)]_{P'(C)} \quad -$$

Suriettiva: f e π'_C sono suriettive

$$\Rightarrow F \circ \pi^3_R \rightarrow \text{anche } F$$

Injectiva?

$$F(p_1) = F(p_2) \not\Rightarrow p_1 = p_2, \\ (\text{DOMANI})$$