

Geometria 9/5/18

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 : {}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0\}$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \Rightarrow \text{usando}$$

- $A \rightsquigarrow {}^t M A M \quad (Q \rightsquigarrow {}^t N \cdot Q \cdot N) \quad M = \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & c \end{pmatrix}$
(cambio coord. off-diag)
- $A \rightsquigarrow \lambda \cdot A \quad \lambda \neq 0$
(mult. equiv. por λ)

$\Leftarrow$ prove:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$\emptyset$ ellipsoide ip. ell

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & +1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

ip. ip. parab. ell. parab. ipub.

Domanda: data A come decido il tipo offline?

Oss: con le transf. lecite i segni degli autoval di X e Q o non cambiano o cambiano tutti -

$\Rightarrow$ il tipo affine di L è determinato
da segni di autoval di Q e di A :

$\emptyset$: $+++ / ++++$

ellissoide: $+++ / +++-$

ip. ell: $++- / ++-+$

ip. ipub: $++- / ++--$

parab. ell: $++0 / +++-$

parab. ipub: $+ - 0 / +-+-$

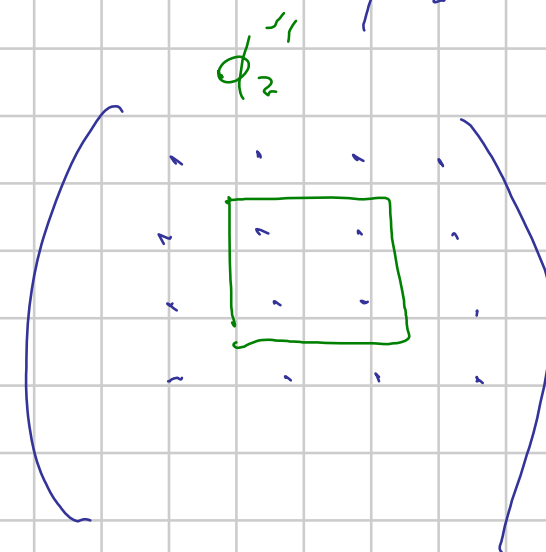
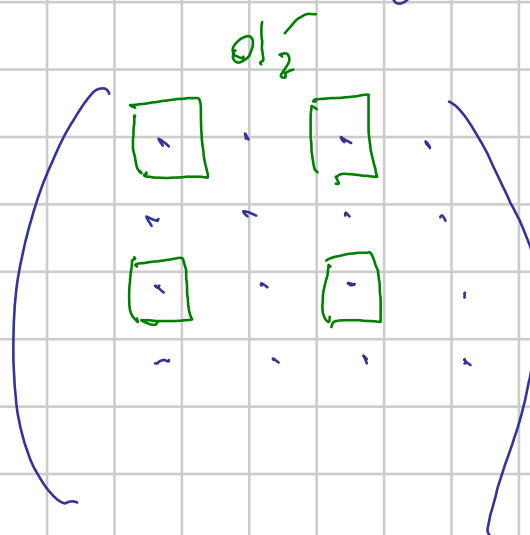
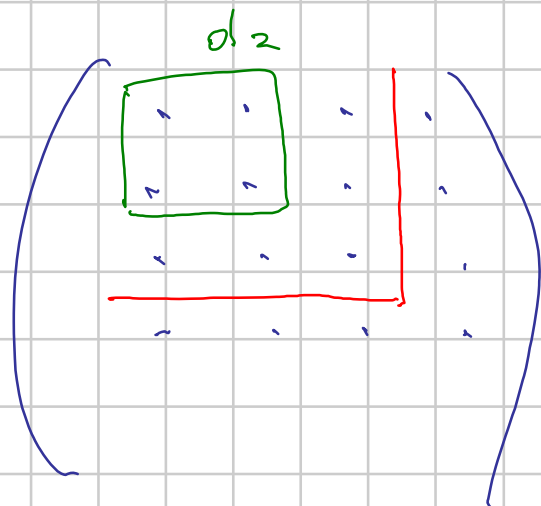
Metodo: usare d_1, d_2, d_3, d_4 per trovare
idei separati.

Caso facile: $d_1, d_2, d_3, d_4 \neq 0$

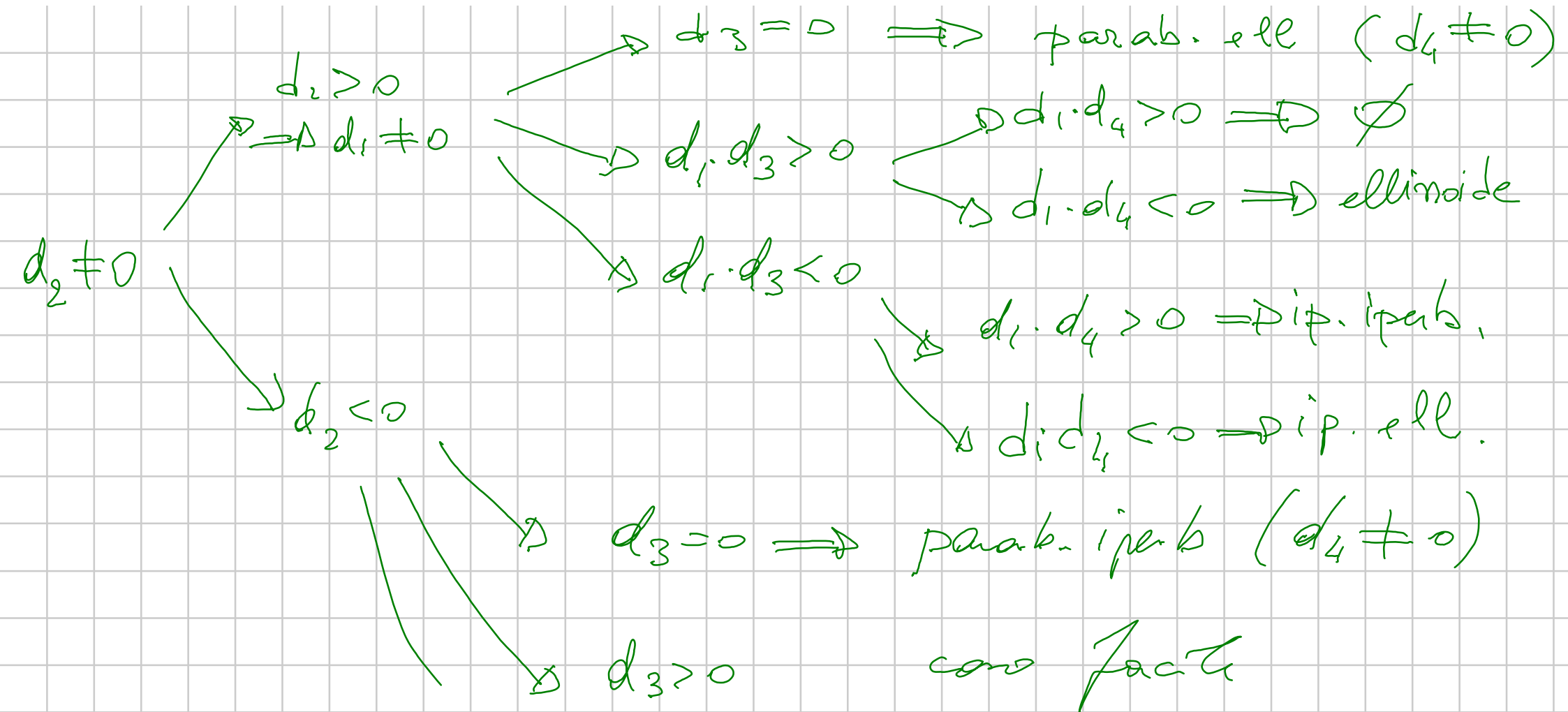
spr. anulare $\mathbb{Q}/A$: $d_1, d_1/d_2, d_2/d_3, d_3/d_4, d_1/d_1, d_2/d_3, d_3/d_4$.

Se qualche d_i ($i < 4$) $\bar{e} = 0$ allora due
casi:

- a meno di cambiare l'ordine delle coord, $d_2 \neq 0$



Conclusion:



↙ $d_3 < 0$

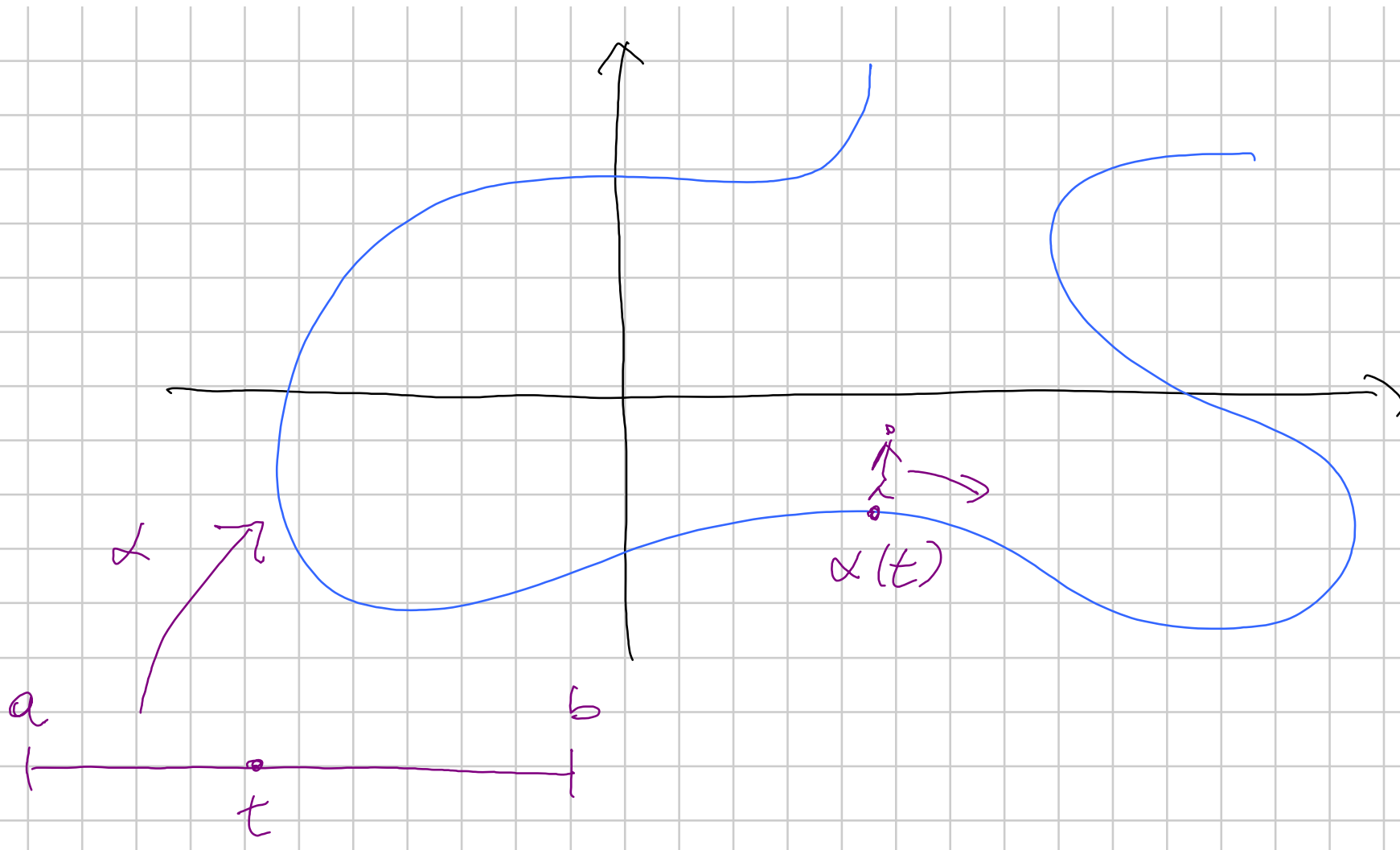
caso facile

- Se $d_2 = 0$ compiere si principale le coord.
(rariissimo: cf. libro) —

————— 0 —————

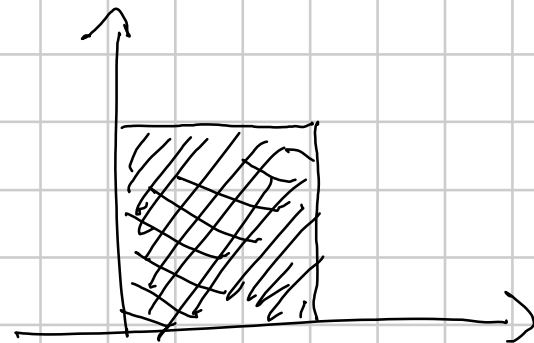
Curve in $\mathbb{R}^n$ ($n=2, n=3 \dots$)

Curva : oggetto di $\dim = 1$ in $\mathbb{R}^n$
ma non dritto (come ellipse,
parabole, ramo di iperbole)



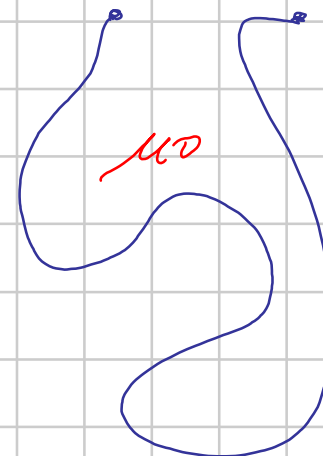
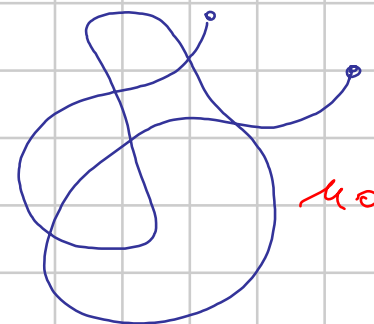
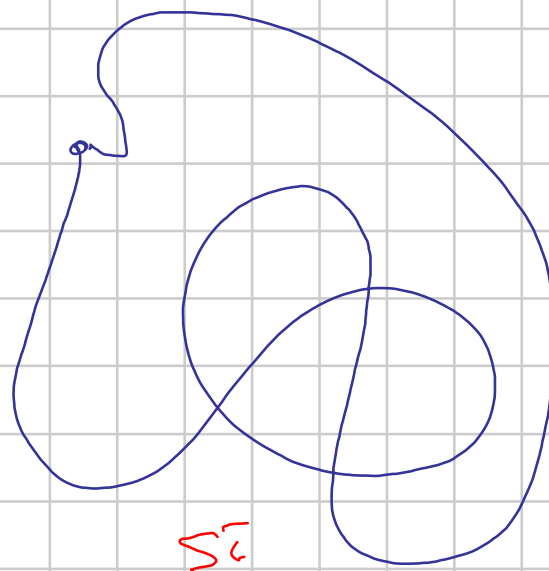
Def: chiamo curve parametrizzate
una $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, α continua.

Oss: senza fare nessuna altra riduzione non
vale bene: esistono $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.
 $I_u(\alpha) = [0, 1] \times [0, 1]$

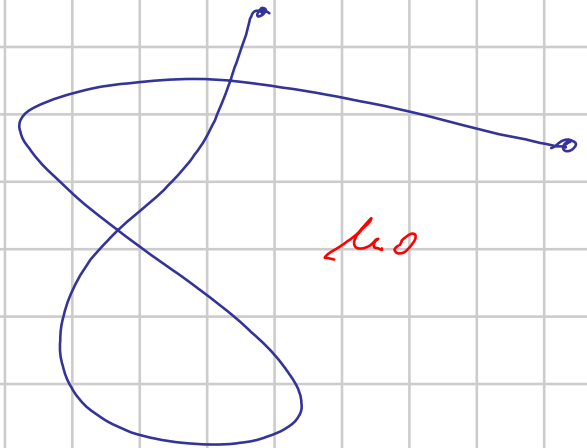
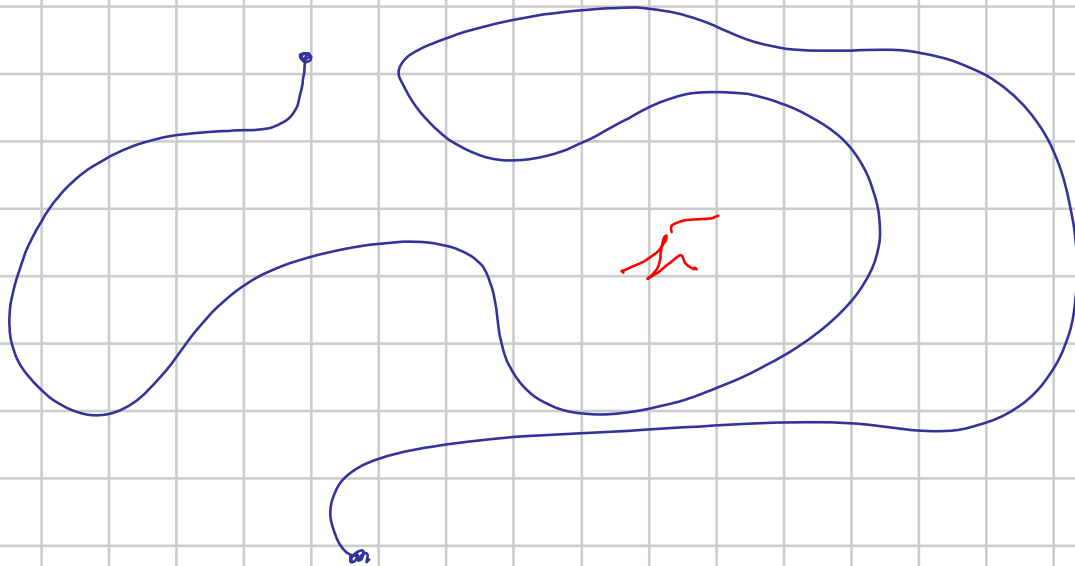


Def: $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e' detta

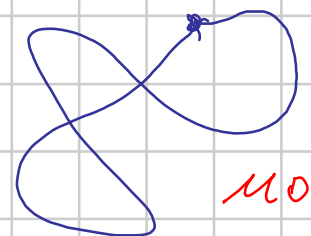
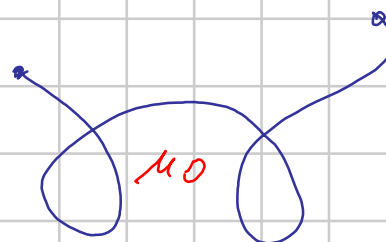
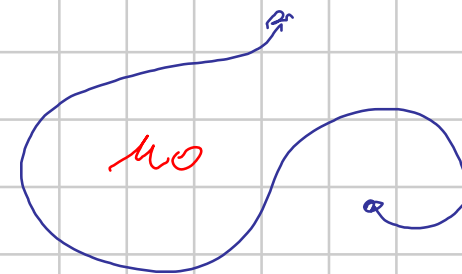
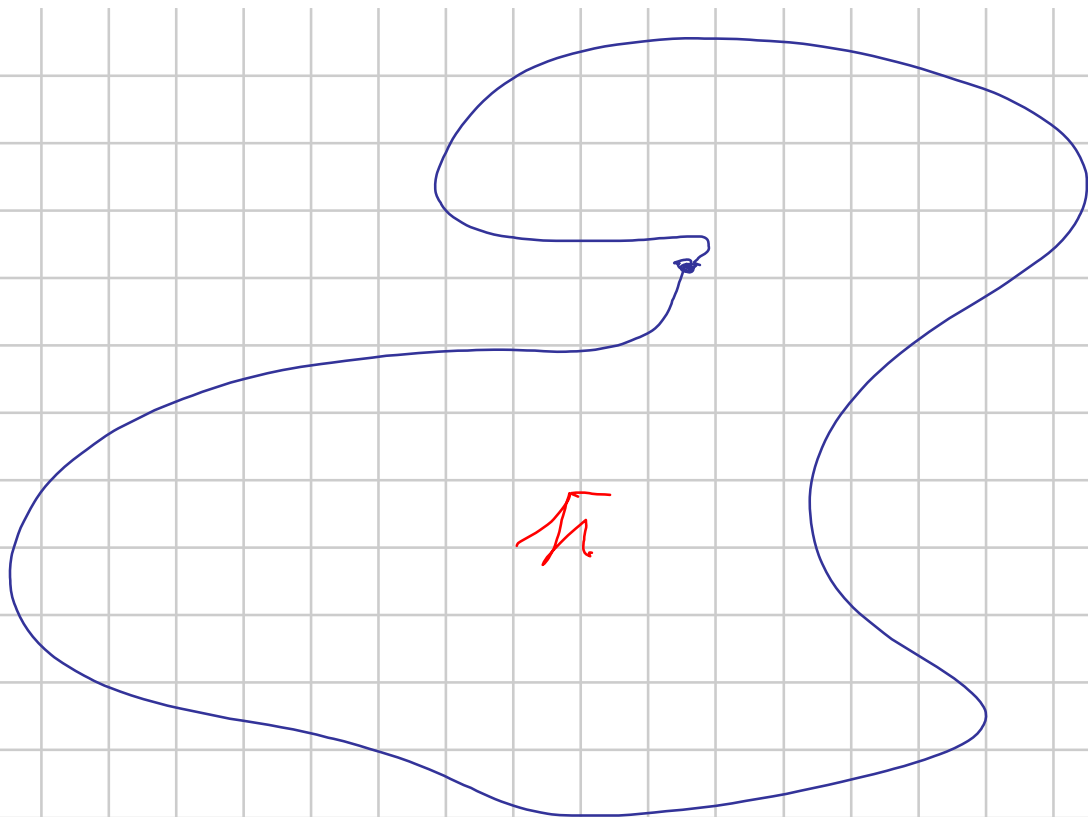
- chiusa se $\alpha(b) = \alpha(a)$



- Semplice se α è iniettiva



- Semplice e chiusa se $\alpha(b) = \alpha(a)$ e $\alpha|_{[a,b]}$ è iniettiva

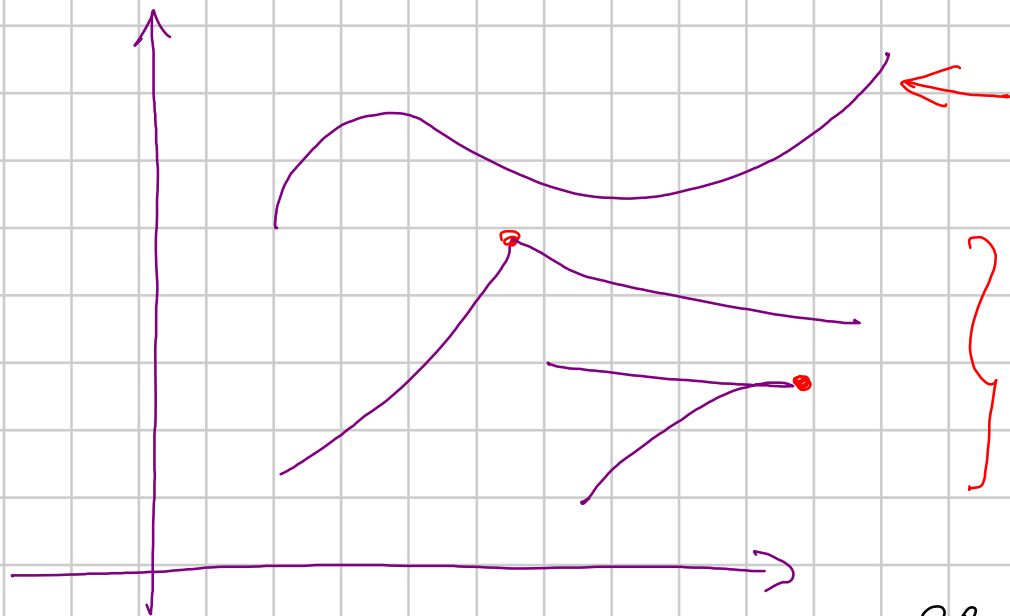


Vogliamo curve che al massimo esclusi alcuni punti
abbiano una sola tangente.

Per il propo di f , se $\exists f' \Rightarrow \exists$ retta t_f .

Def: dico che $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è regolare
se α è derivabile (cioè $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ derivabili)
e $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

Es:

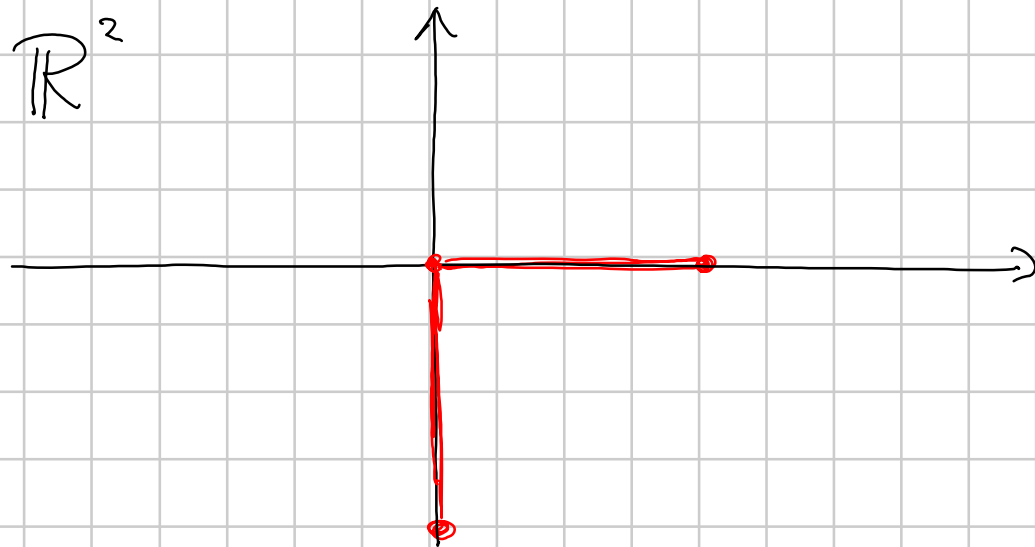


Esistono rette t_p .

nel pto. non c'è
una tangente.

Es. 1: $\alpha(t) = \begin{cases} (0, t^{99}) & -1 \leq t < 0 \\ (t^{99}, 0) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

$$\alpha: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$



Ovvio: α è derivabile lontano da $t=0$

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (0, 99 \cdot t^{98}) & t < 0 \\ (99 \cdot t^{98}, 0) & t > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \alpha'(t) = (0, 0) \quad \Rightarrow \alpha \text{ derivabile in } [-1, 1]$$

(α è derivabile 98 volte)

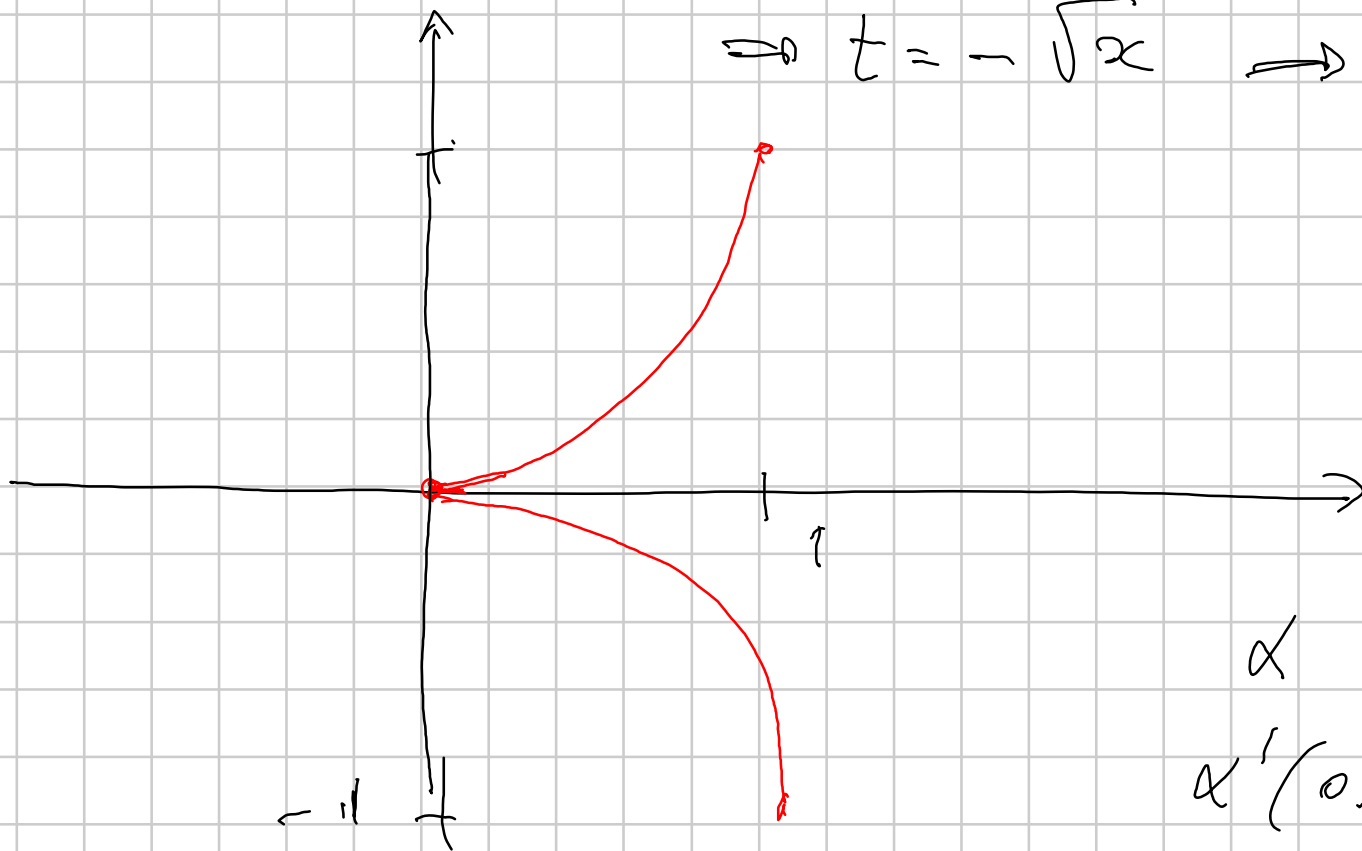
E s 2: $\alpha(t) = (t^2, t^3) \quad t \in [-1, 1].$

Per $t \geq 0$ $\alpha(t) = (x, y) \Rightarrow x = t^2, y = t^3$
 $\Rightarrow t = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{3/2}$

Per $t \leq 0$

$$\alpha(t) = (x, y) \Rightarrow x = t^2, y = t^3$$

$$\Rightarrow t = -\sqrt{x} \Rightarrow y = -x^{3/2}$$

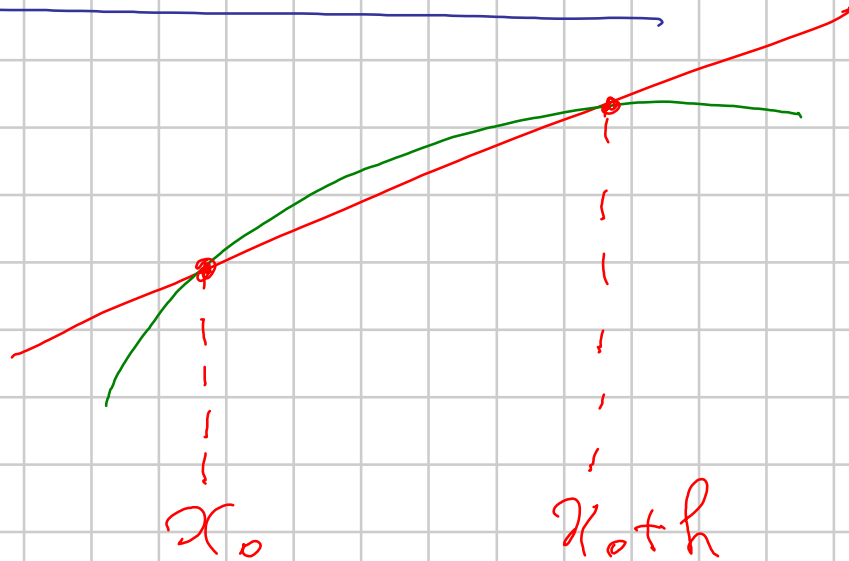


cuspide

α derivabile a volte

$$\alpha'(0) = (0, 0).$$

TANGENTE A CURVA

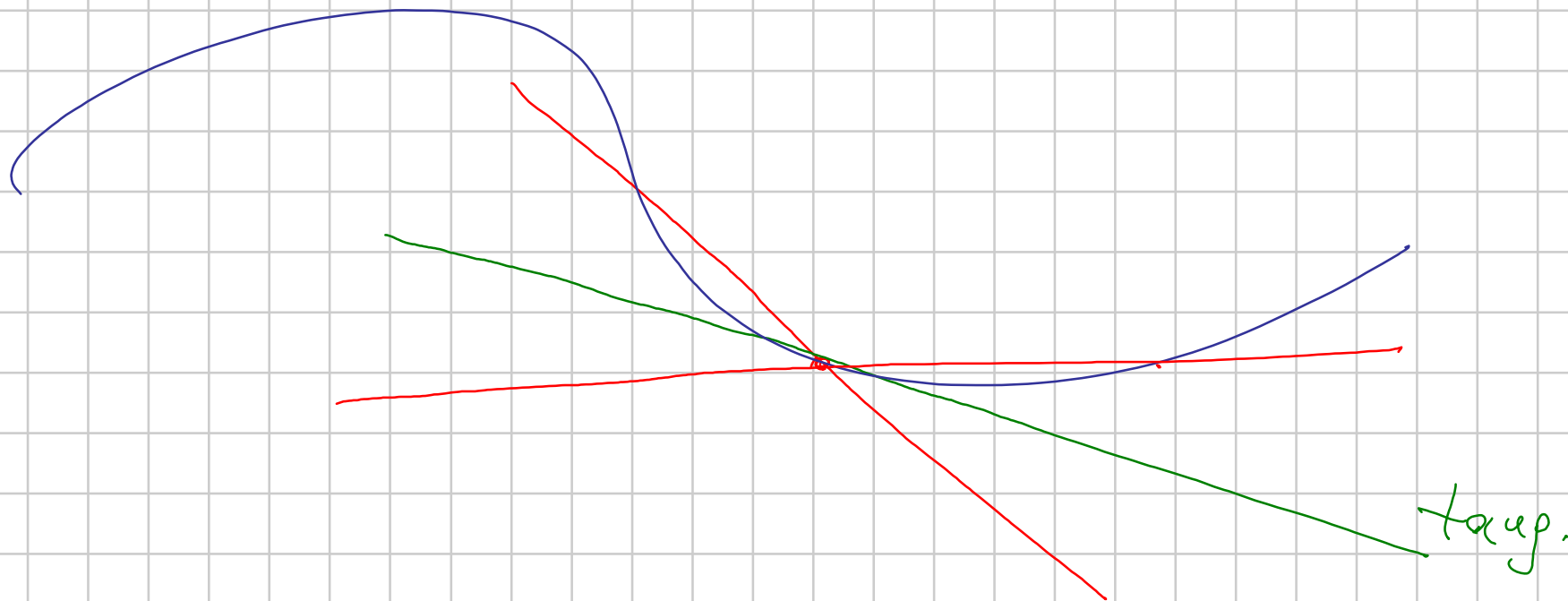


$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\downarrow \lim_{h \rightarrow 0}$

$$f'(x_0)$$

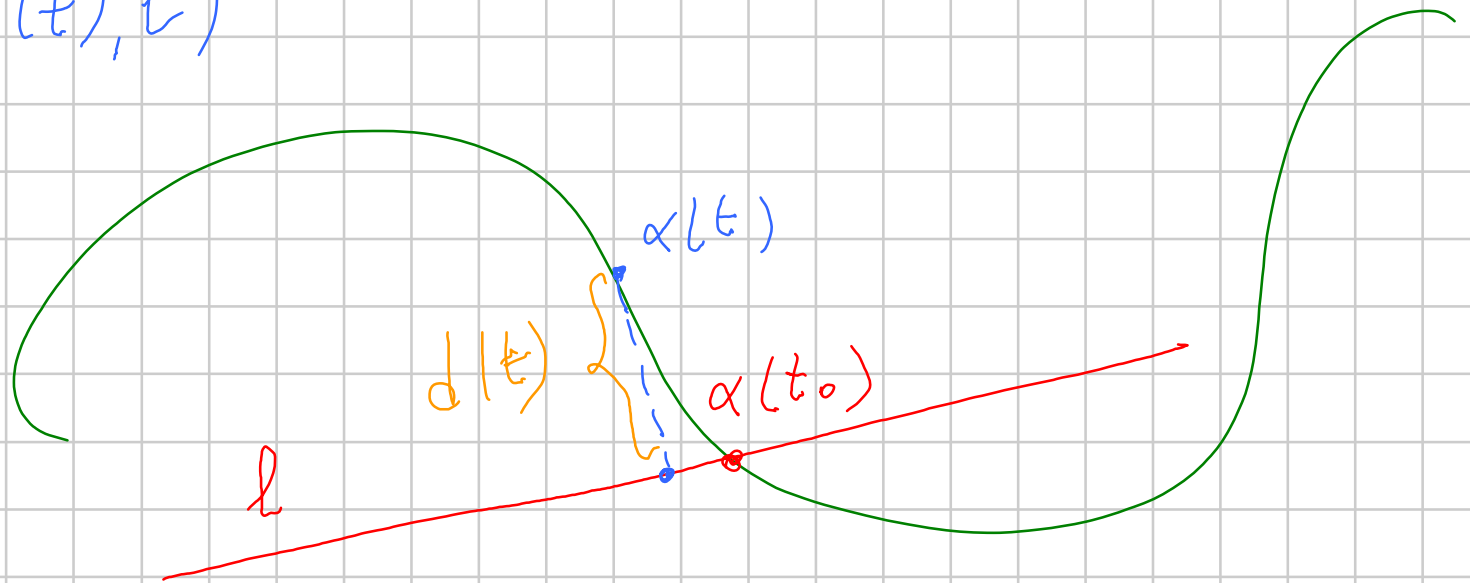
$\Rightarrow$ tangente = limite secanti.



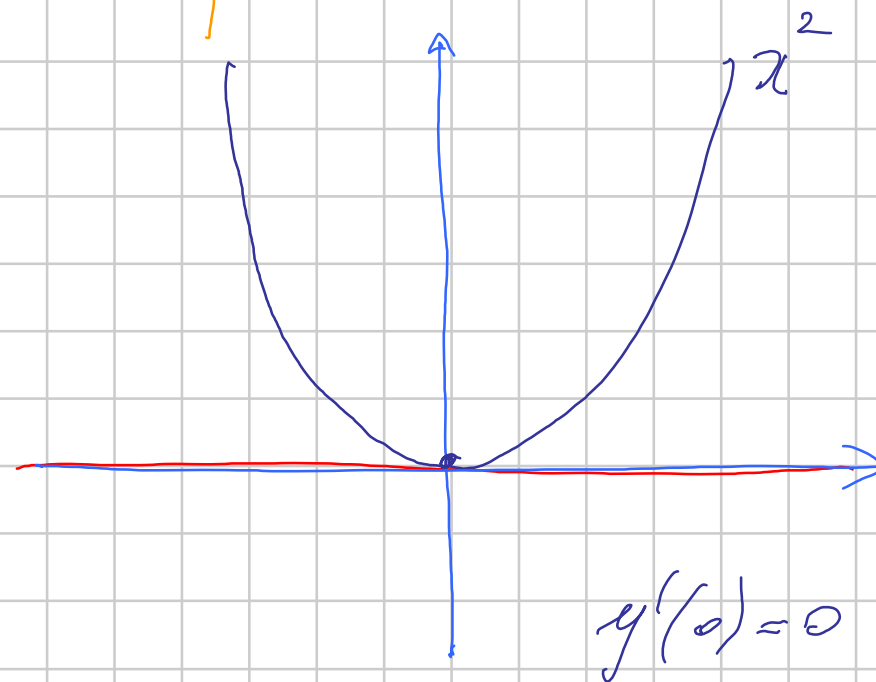
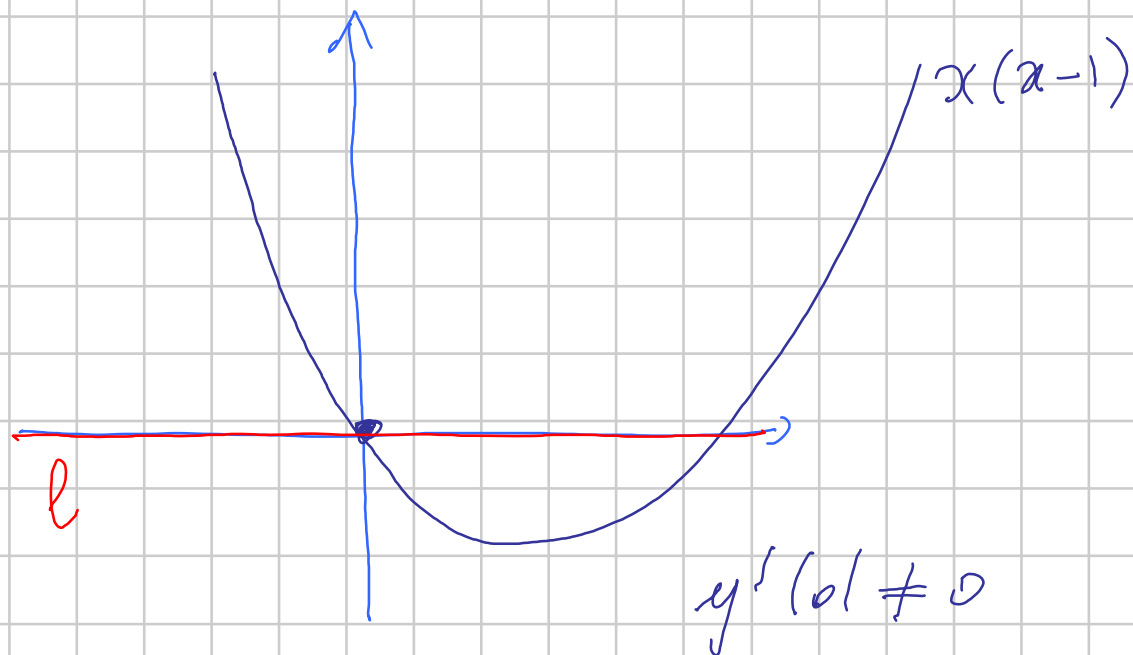
⇒ la tangente è la retta che ha con la curva
un contatto duplicato (funzione di due
punti di contatto)

Se fisso α curva e t_0 e una
retta l passante per t_0 Considero:

$$d(t) = \text{dist}(\alpha(t), l)$$



Qss: $d(t_0) = 0 \iff l$ passe per $x(t_0)$



$\Rightarrow$ chiedere che l sia tangente significa
chiedere $d'(t_0) = 0$

Prop: se $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è regolare, $t_0 \in (a, b)$
la retta per $\alpha(t)$ e $\alpha(t_0)$ tende a
 $\alpha(t_0) + \text{Span}(\alpha'(t_0))$ per t che tende a t_0 .
Quella è l'unica retta con contatto
duplice con α in $\alpha(t_0)$.

Dim: retta per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$
 $= \alpha(t_0) + \text{Span}(\alpha(t) - \alpha(t_0))$

$$= \alpha(t_0) + \text{Span} \left(\frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} \right)$$

$\downarrow$
 $\alpha'(t_0)$

Per $n=2$ considero $l: ax+by+c=0 \quad (a^2+b^2=1);$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

$$d(t) = |aX(t) + bY(t) + c|$$

$$= \sqrt{(aX(t) + bY(t) + c)^2}$$

$$d(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -(aX(t_0) + bY(t_0))$$

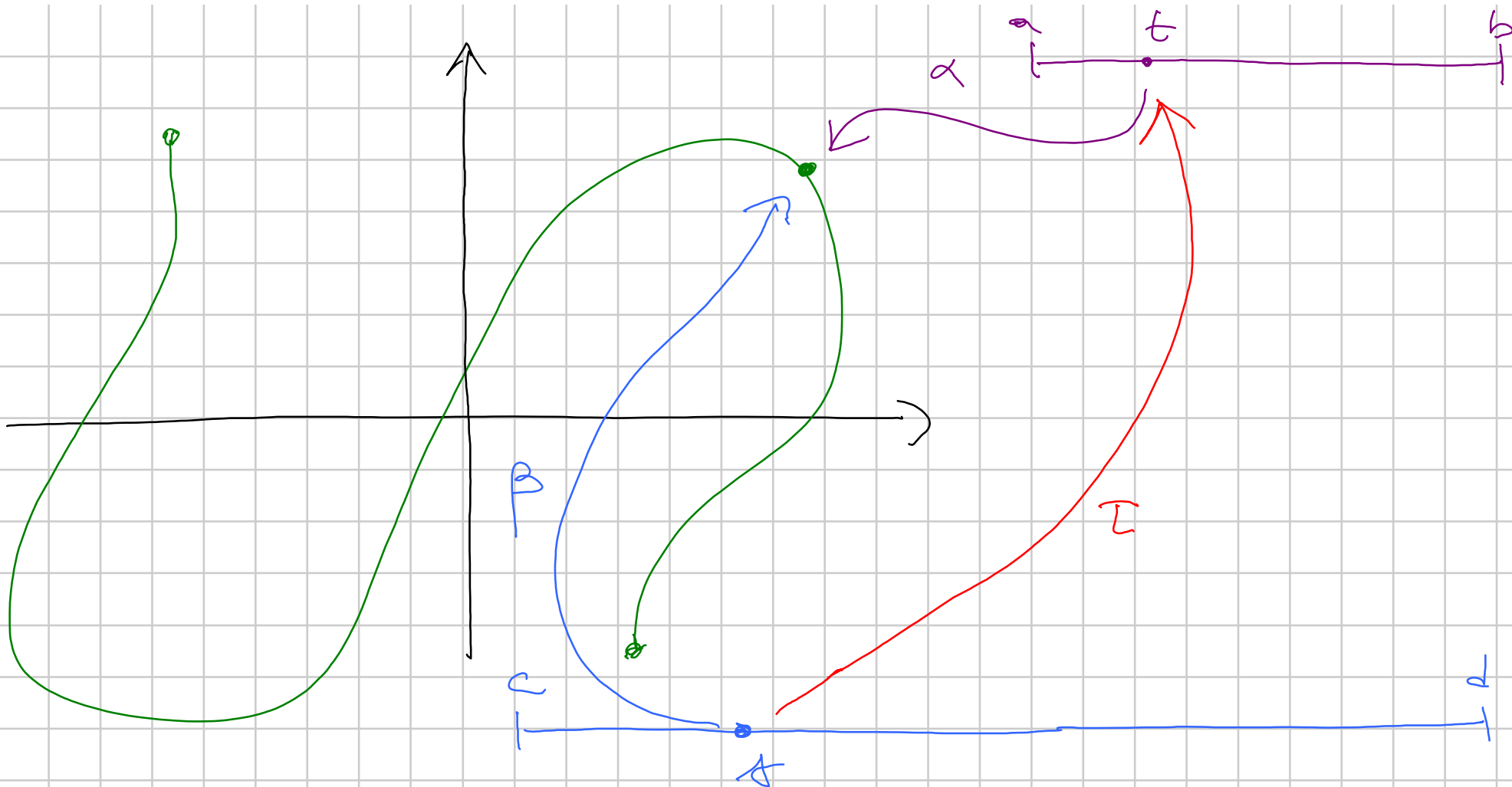
$$d'(t) = \frac{1}{2} \frac{2(aX(t) + bY(t) + c)}{\sqrt{(aX(t) + bY(t) + c)^2}} \cdot (aX'(t) + bY'(t))$$

$$\frac{aX(t) + bY(t) + c}{|aX(t) + bY(t) + c|}$$

$$\pm 1$$

$d'(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow t_0 \Leftrightarrow a X'(t_0) + b Y'(t_0) = 0$
 $\Leftrightarrow$ la tangente di ℓ è $x'(t_0)$. $\square$

Def: se $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una curva
 regolare parametrizzata di arco $\text{Im}(\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ il supporto
 di α .



Def: date $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$
dico che β è ottenuta da α per cambio di
parametrizzazione se $\exists \tau: [c, d] \rightarrow [a, b]$

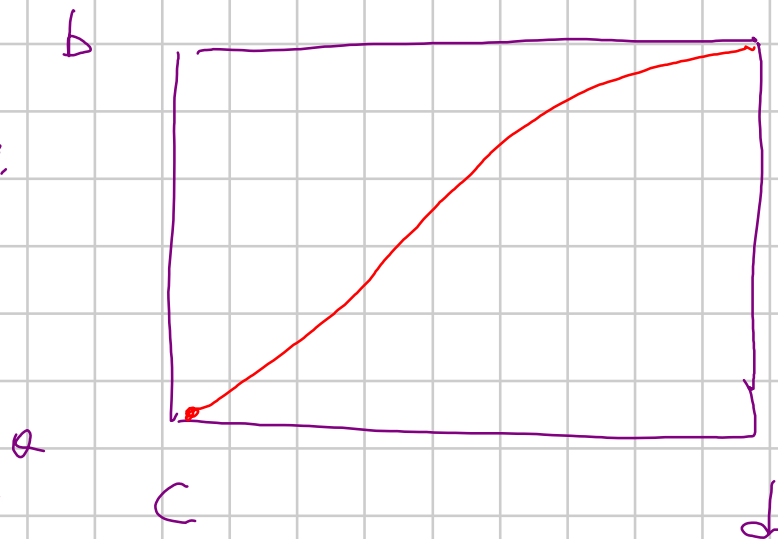
$$\beta(t) = \alpha(\tau(t))$$

con τ funzione biettiva.

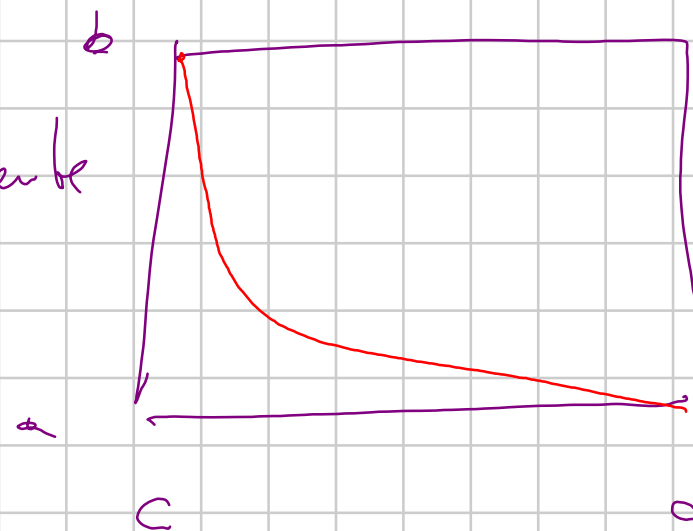
(cioè: α, β sono due modi diversi di percorrere
lo stesso supporto.)

Def: una funzione $f: [c, d] \rightarrow [a, b]$ è

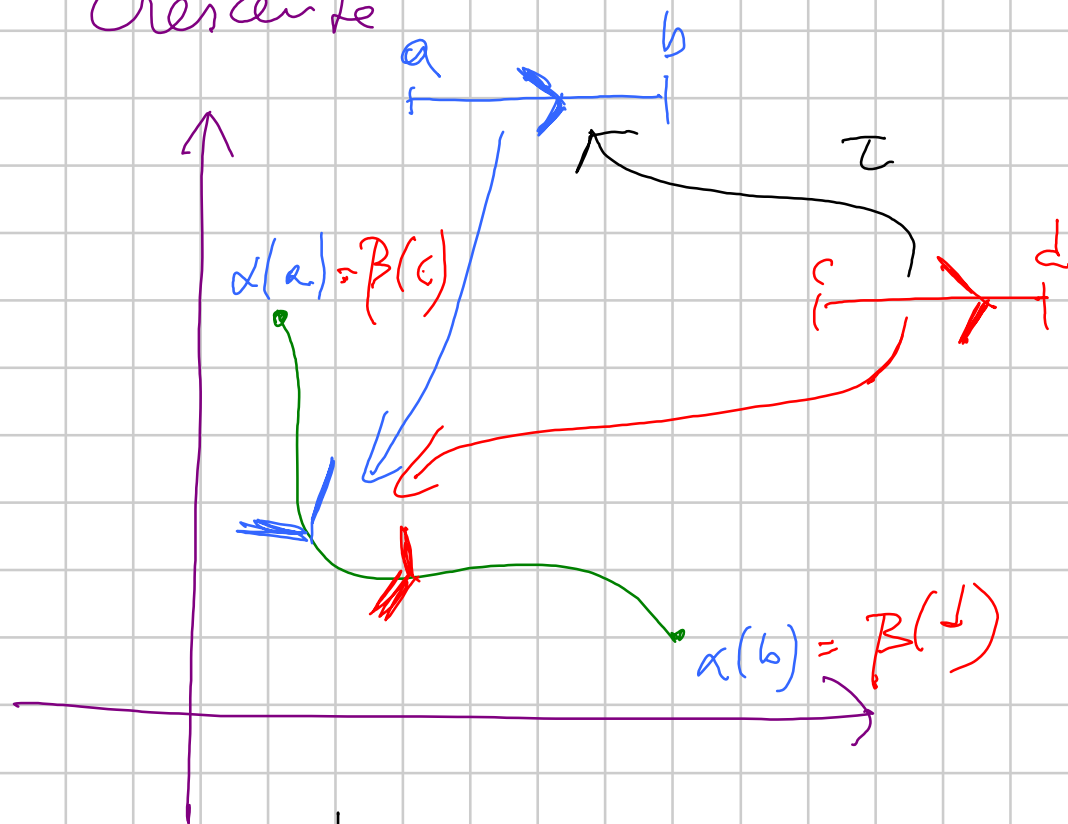
Crescente:



Decrescente

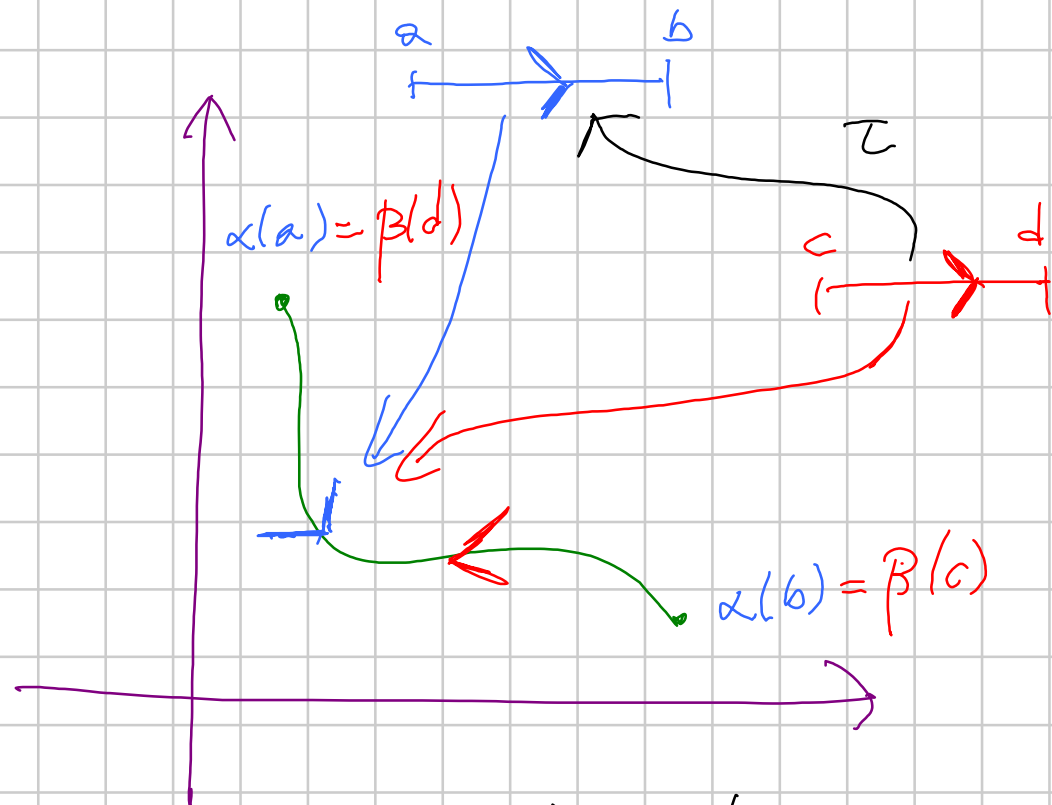


Crescente



Cambio di variabile che
preserva l'orientazione

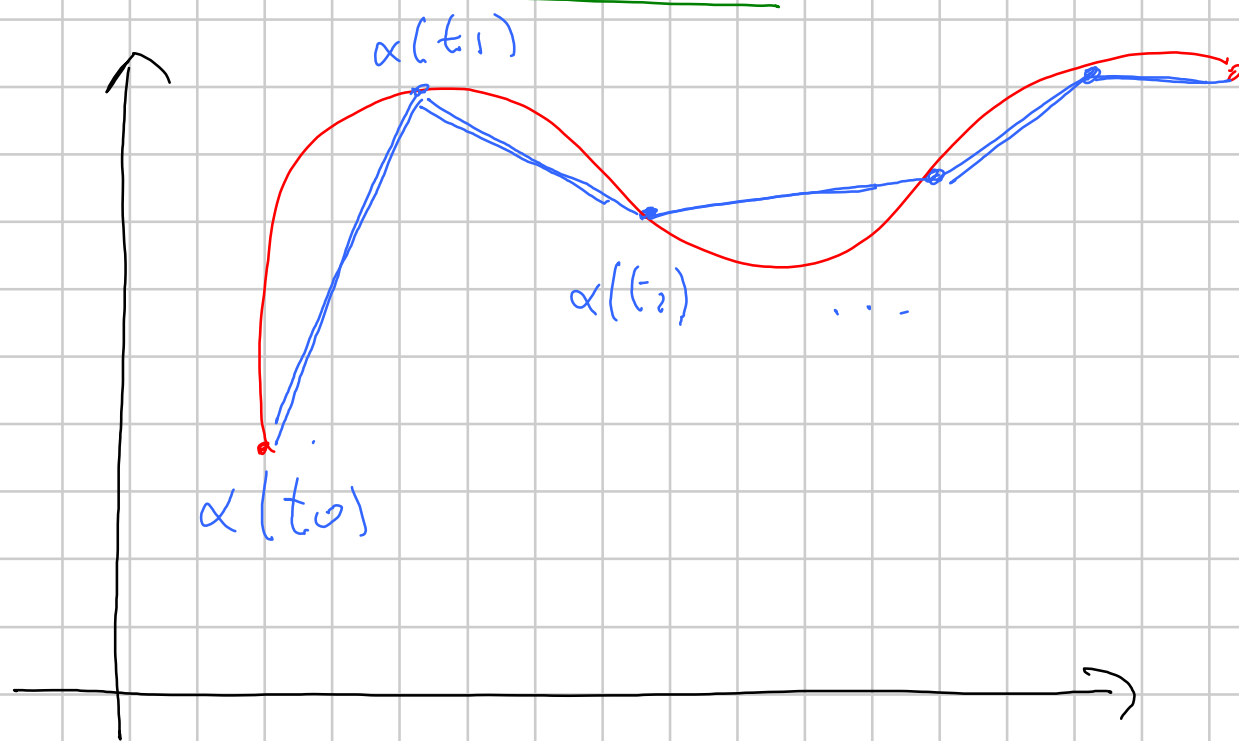
decrescente



Cambio che inverte
l'orientazione -

Def: una curva orientata è una curva
con specificato verso di percorrenza.
Sono accettabili solo parametrizzazioni che
rispettano questo verso.

Length of a curve



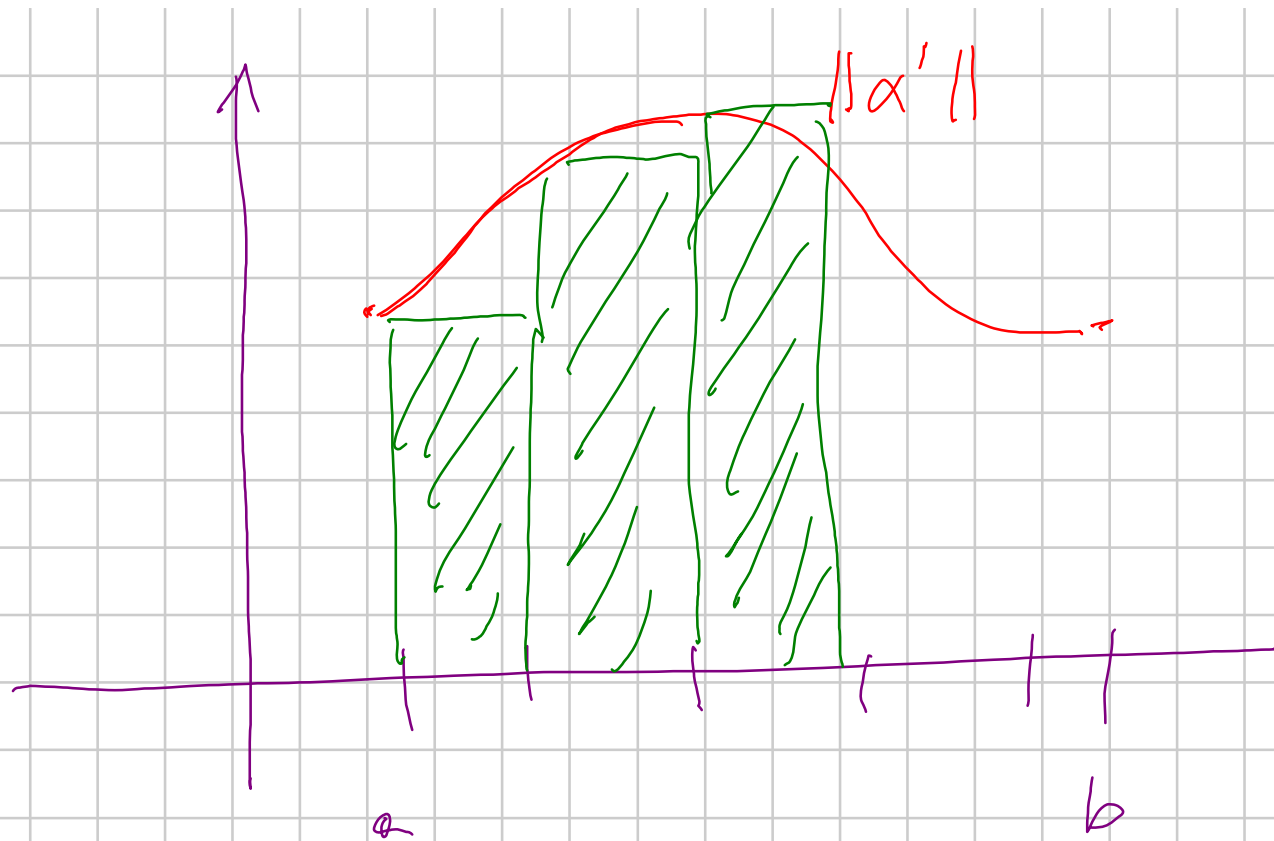
α

a b
 $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$

$$L(\alpha) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{N-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$$

$$= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \alpha(t_i) + \alpha'(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) - \alpha(t_i) \right\|$$

$$= \lim_{\dots} \sum_{i=0}^{N-1} \|\alpha'(t_i)\| \cdot (t_{i+1} - t_i)$$



$$= \int_a^b \|x'(t)\| dt$$