

6/4/2018

9.4.4 :

$$M \in M(n \times n, \mathbb{R})$$

l.c.

${}^t M M$ è diagonale e invertibile

Quanti sono le $D \in M(n \times n, \mathbb{R})$ diagonali

e l.c.

MP è una matrice ortogonale?

$${}^t M M = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

C_i invertibile $\Rightarrow c_i \neq 0$

Anche M è invertibile.

${}^t M M$ è la matrice associata al prodotto scalare

$$\langle x | y \rangle = {}^t(Mx) My = {}^t x {}^t M M y$$

$$\Rightarrow c_i > 0$$

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m \end{pmatrix}$$

$$M D \text{ è ortogonale} \Leftrightarrow {}^t(M D) M D = Id$$

$$\Leftrightarrow \hookrightarrow D(MM)D = I_d \Leftrightarrow \underbrace{DCD = I_d}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 c_1 & & 0 \\ & x_2^2 c_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & x_n^2 c_n \end{pmatrix}.$$

$$DCD = I_d \Leftrightarrow x_i^2 c_i = 1, \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{c_i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

(ricordiamo $c_i > 0$)

Le matrici che soddisfanno la richiesta sono

$$\begin{bmatrix} 2 & n \end{bmatrix}$$

$\mapsto$

9.4.3: $\mathbb{R}^3$, prodotto scalare standard.

(a) matrice di rappresentazione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

riflessione rispetto al piano

$$\{2x - 3y + 4z = 0\} = W$$

Prima strategia:

costruisco u_1, u_2 base di W

aggiungo u_3 vettore ortogonale
a W

$\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ è una base di W .

Rispetto a queste base la matrice di f !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per avere la matrice nella base canonica, applico

le formule x il condizione di base (esercizio x caso!)

$$W^\perp = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Siano $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow W$, $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow W^\perp$ le proiezioni.

$$\text{Vale } f(v) = p(v) - q(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Inoltre, se $v \in W$:

$$p(v) - q(v) = v - 0 = v$$

$$\text{Se } v \in W^\perp : p(v) - q(v) = 0 - v = -v$$

$$\text{Ricciardiemo : } p + q = I_d$$

$$\text{cioè } p = I_d - q$$

$$f = p - q = I_d - 2q$$

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad q(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w = \frac{2x - 3y + 4z}{29} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matrice associata a $f = 1 - 2q$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2q} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 \\ -6 & 9 & -12 \\ 8 & -12 & 16 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2q} \begin{pmatrix} 2q & 12 & -16 \\ 12 & 1q & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{pmatrix} =: A$$

Dobbiamo verificare $\hookrightarrow AA = I_d$ ($\leftarrow$ fare l' inversa)

(b) $\text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{V}$

mettre di una delle rotazioni ^g di angolo $\frac{\pi}{6}$ intorno
a $\mathcal{V}$.

Scegliamo una base u_1, u_2 ortonormale
di $\mathcal{V}^\perp$

e la completiamo a una base ortonormale
di $\mathbb{R}^3$.

la matrice di g rispetto alla base

u_1, u_2, u_3 :

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = A$$

$$M = \left(u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right)$$

La matrice di g rispetto alla base canonica è:

$$M A M^{-1} = M A^t M$$

Per concludere devo trovare la base u_1, u_2, u_3 descritte.

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per u_1, u_2 base di $\{x + y + z = 0\}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

v_1 e w_2 sono una base ortogonale di $1x+y+z=0$.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

