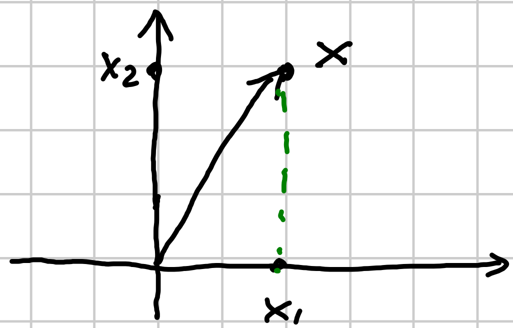
2/3/2018

$\mathbb{R}^2$ $\quad x = (x_1, x_2)$



distanza di x da 0 :

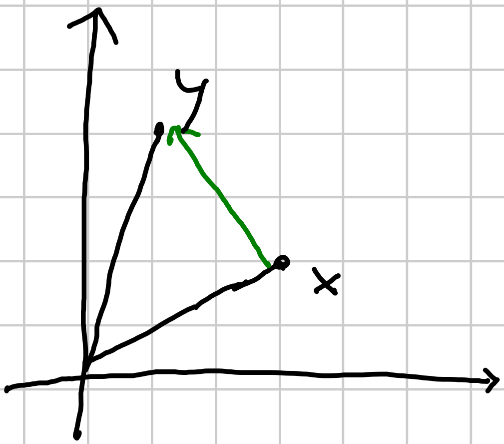
$$d(0,x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} =: \|x\|$$

"norma di x"

Analogamente : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(0,x) = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} =: \|x\|$$

In $\mathbb{R}^2$: $x=(x_1, x_2)$, $y = (y_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$



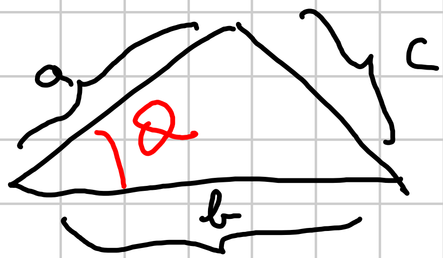
la distanza di x da y è

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

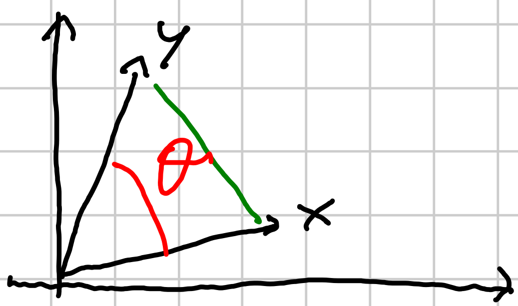
Allo stesso modo: $x=(x_1, \dots, x_n)$, $y=(y_1, \dots, y_n)$ $\in \mathbb{R}^n$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left((x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Angoli; Teorema di Carnot:



$$a^2+b^2 = c^2 + 2ab\cos\theta$$



$$y=(y_1,y_2),\ x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$\|x\|^2+\|y\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|\cos\theta$$

$$\cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{y_2^2} = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2\|x\|\,\|y\| \cos\theta$$

$$= \cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} \underbrace{-2x_1y_1} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_2^2} \underbrace{-2x_2y_2} + 2\|x\|\|y\|\cos\theta$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \|x\|\,\|y\| \cos\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|x\|\,\|y\|}$$

Definiamo il prodotto scalare di x e y :

$$\langle x | y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

ho una funzione: $\langle \ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

vale: $\quad \|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \langle x | x \rangle^{\frac{1}{2}}$

$$\cos\theta = \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

Diciamo che x e y sono ortogonali se $\langle x | y \rangle = 0$

In $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\quad y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle \ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

come prima:

$$\|x\| = (\langle x | x \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

Questo è il "prodotto scalare euclideo standard".

Se scrivo i vettori di $\mathbb{R}^n$ come colonne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{vale:} \quad \langle x|y\rangle = {}^t x \, y$$

Proprietà:

(1) simmetria: $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(2) $\langle \, | \, \rangle$ è bilineare, cioè:

$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 | y_1 \rangle = \alpha_1 \langle x_1 | y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_2 | y_1 \rangle$

("linearità nel 1° argomento")

$\langle x_1 | \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \alpha_1 \langle x_1 | y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_1 | y_2 \rangle$

("linearità nel 2° argomento")

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \langle x | x \rangle \geq 0$

e $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^3$

$\vdash$

<u>Def</u>: (1) Una forma bilineare su uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ è:

$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall v, w_1, w_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

- $\varphi(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 \varphi(v, w_1) + \alpha_2 \varphi(v, w_2)$
- $\forall v_1, v_2 \in V, w \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \varphi(v_1, w) + \alpha_2 \varphi(v_2, w)$$

(2) data $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare

φ è <u>simmetrica</u> se $\varphi(v, w) = \varphi(w, v) \quad \forall v, w \in V$

(3) diciamo che φ è <u>definita positiva</u> se

$\forall \; v \in V, \quad \varphi(v, v) \geq 0$

e $\varphi(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0 \in V$

(4) una forma bilineare simmetrica def > 0

si chiama PRODOTTO SCALARE

<u>Esempi!</u> $V = M_{p\times q}(\mathbb{R})$

definisco $\langle\ |\ \rangle : V \times V \longrightarrow V$ come segue:

$A, B \in V$

$^{t}A\,B \in M_{q\times q}(\mathbb{R})$

$\langle A | B \rangle = tr(^{t}A\,B)$

• linearità nel 1° argomento: $\forall\ A_1, A_2 \in V\ , B \in V$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \mid B \rangle \overset{?}{=} \lambda_1 \langle A_1 | B \rangle + \lambda_2 \langle A_2 | B \rangle$$

$$\langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \mid B \rangle = Tr\left({}^t(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) B \right)$$

$$= tr\left((\lambda_1 {}^tA_1 + \lambda_2 {}^tA_2) B \right) = Tr(\lambda_1 {}^tA_1 B + \lambda_2 {}^tA_2 B) =$$

$$= \lambda_1 tr({}^tA_1 B) + \lambda_2 tr({}^tA_2 B) = \lambda_1 \langle A_1 | B \rangle + \lambda_2 \langle A_2 | B \rangle$$

✓