

Algebra Lineare 31/10/17

$$V = W \oplus Z \quad \text{se} \quad W \cap Z = \{0\} \quad \text{e} \quad W + Z = V.$$

Quel caso ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{w} + \underset{\substack{\uparrow \\ Z}}{z}$$

$$\text{Def: } p, q: V \rightarrow V \quad p(v) = w, \quad q(v) = z.$$

p, q linear

$$p(v_1) = w_1$$

$$q(v_1) = z_1$$

$$p(v_2) = w_2$$

$$q(v_2) = z_2$$

di e^c

$$v_1 = w_1 + z_1$$

$$v_2 = w_2 + z_2$$

$$w_1, v_2 \in W$$

$$z_1, z_2 \in Z$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \underbrace{(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)}_{\substack{\uparrow \\ W}} + \underbrace{(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)}_{\substack{\uparrow \\ Z}}$$

$$\Rightarrow p(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 p(v_1) + \alpha_2 p(v_2)$$

$$\Rightarrow q \dots$$

$$p \circ p = p$$

$$q \circ q = q$$

$$p \circ q = q \circ p = 0$$

$$p + q = \text{id}_V$$

$$p(v) \in W$$

$$\Rightarrow p(v) = \underbrace{p(v)}_W + \underbrace{0}_Z$$

$$\Rightarrow \phi(p(v)) = p(v)$$

$$q(p(v)) = 0$$

$$\Rightarrow p \circ p = p \quad q \circ p = 0$$

$$v = p(v) + q(v) \Rightarrow$$

$$\text{id}_V = p + q.$$

$$W = \text{Im}(p) = \text{Ker}(q)$$

$$Z = \text{Ker}(p) = \text{Im}(q)$$

$$w \in W \Rightarrow w = \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{w} + \underset{\substack{\uparrow \\ Z}}{0} \Rightarrow \begin{matrix} p(w) = w \\ q(w) = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow w \in \text{Im}(p) \\ w \in \text{Ker}(q).$$

$$\text{So } w \in \text{Im}(p) \text{ ho } w \in \bar{W}.$$

$$\text{So } w \in \text{Ker}(q) \Rightarrow w = \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{p(w)} + \underset{\substack{= \\ 0}}{q(w)} \Rightarrow w \in \bar{W}.$$



Esempio: $M_{m \times m}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{I}_m, \mathcal{Q}_m$

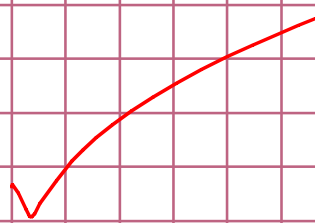
$$\mathcal{I}_m = \{A : {}^t A = A\} \quad \mathcal{Q}_m = \{A : {}^t A = -A\}$$

Verifico che $M_{m \times m} = \mathcal{I}_m \oplus \mathcal{Q}_m$:

$$\mathcal{I}_m \cap \mathcal{Q}_m = \{0\} : \quad {}^t A = A, {}^t A = -A \\ \Rightarrow A = -A \Rightarrow A = 0.$$

Ora basta verificare che

$$\underbrace{\dim(P_n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\dim(Q_n)}_{\frac{n(n-1)}{2}} = \underbrace{\dim(M_{n \times n})}_{n^2}$$



Esplicitare le proiezioni P, Q :

date $A \in M_{n \times n}$ voglio scrivere

$$A = X + Y \quad X \in I_n, Y \in Q_n$$

Se a la faccio:

$${}^t A = X - Y$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} (A + {}^t A) \quad Y = \frac{1}{2} (A - {}^t A);$$

Verifichiamo:

$${}^t X = \frac{1}{2} ({}^t A + A) = X \quad \checkmark$$

$${}^t Y = \frac{1}{2} ({}^t A - A) = -Y \quad \checkmark$$

$$X + Y = A \quad \checkmark$$

————— o —————

Prop: data $p: V \rightarrow V$ t.c. $p \circ p = p$, la p
 è la proiezz. su W associata alla deco.
 $V = W \oplus Z$ dove $W = \text{Im}(p)$, $Z = \text{Ker}(p)$.

Dim : Pour $W = \text{Im}(p)$, $Z = \text{Ker}(p)$.

• $W \cap Z = \{0\}$: $v \in W \cap Z$

$$v \in W \Rightarrow v = p(x)$$

$$v \in Z \Rightarrow p(v) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(v) &= p(p(x)) = (p \circ p)(x) \\ &= p(x) = v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v = 0.$$

• $W + Z = V$ et $\neq$ la prouvez. sur W :

$$v = p(v) + (v - p(v))$$

$\Downarrow$

$$W = \text{Im}(p)$$

OK

$\Downarrow$

$$Z = \text{Ker}(p)$$

$$\begin{aligned} p(v - p(v)) &= p(v) - p(p(v)) \\ &= p(v) - p(v) = 0. \end{aligned}$$



Def: Se X è un insieme e W è sp. vett.
su $\mathcal{F}(X, W)$ definisco queste operazioni:

$$f_1, f_2 \in \mathcal{F}(X, W), \quad f_1 + f_2 \in \mathcal{F}(X, W)$$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

lo sto
definendo

+ di W

$$\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}(X, W), \quad \lambda \cdot f \in \mathcal{F}(X, W)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

↑ nuovo
↑ W

————— • —————

Fatto: con le operazioni appena definite
 $\mathcal{F}(X, W)$ è uno spazio vettoriale

Def: $\mathcal{L}(V, W) = \{ f \in \mathcal{F}(V, W) : f \text{ lineare} \}$

Prop: $\mathcal{L}(V, W)$ è sottosp. vet. di $\mathcal{F}(V, W)$.

Dim: siano $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Verifichiamo che $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}(V, W)$; cioè
che comunque presi $v_1, v_2 \in V$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ho
$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(v_1) + \beta_2 (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(v_2)$$

$$\alpha_1 f_1(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) + \alpha_2 f_2(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)$$

$$\alpha_1 (\beta_1 f_1(v_1) + \beta_2 f_1(v_2)) + \alpha_2 (\beta_1 f_2(v_1) + \beta_2 f_2(v_2))$$

$$\beta_1 (\alpha_1 f_1(v_1) + \alpha_2 f_2(v_1)) + \beta_2 (\alpha_1 f_1(v_2) + \alpha_2 f_2(v_2))$$



Q: Capire come è fatto $\mathcal{L}(V, W)$ -
 In particolare: che dimensione ha?

Teo: la mappa $M_{m \times m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$
 $A \longmapsto f_A$

è lineare biettiva —

Ricordiamo: $A \in M_{m \times m}$ $f_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f_A(x) = A \cdot x$$

Visto: f_A è lineare, cioè $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Teo: "la corrispondenza $A \longleftrightarrow f_A$
consente di identificare come sp. vett.
le appl. lin. da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ con le
matrici $m \times n$ "

$$M_{m \times n} \ni A \longmapsto f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

lineare :

$$\underbrace{f_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2}}_{\substack{\text{in } M_{m \times m} \\ \text{in } \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)}} \neq \underbrace{\alpha_1 f_{A_1} + \alpha_2 f_{A_2}}_{\text{in } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)}$$

Sono appl. con stesso dominio e codominio; devo vedere che

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2}(x) &= (\alpha_1 f_{A_1} + \alpha_2 f_{A_2})(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \\ &\quad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)(x) &\qquad \qquad \qquad \alpha_1 f_{A_1}(x) + \alpha_2 f_{A_2}(x) \end{aligned}$$

$$\alpha_1 \cdot A_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot A_2 \cdot x$$

obiettivo

Basta vedere che ha $\text{Ker} = \{0\}$

cioè che se $f_A = 0$ allora $A = 0$.

Qss: $f_A(e_i^{(n)}) = A \cdot e_i^{(n)}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

||

la i -esima
colonna di A .

① ora, se $f_A = 0$ ho $f_A(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ dunque

$$f_A(e_i^{(n)}) = 0 \quad i = 1 \dots n$$

$\Rightarrow A$ ha tutte le colonne nulle $\Rightarrow A = O$

Suppletività: data $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ cerchiamo
una matrice A t.c. $f = f_A$ cioè che

$$f(x) = f_A(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ cioè che}$$

$$f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se tale A esiste la sua i -esima colonna

deve essere $f(e_i^{(m)})$ - Uso questo fatto per definire A e poi verifico che vada bene:

$$f(e_i^{(m)}) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \cdot e_j^{(m)} ;$$

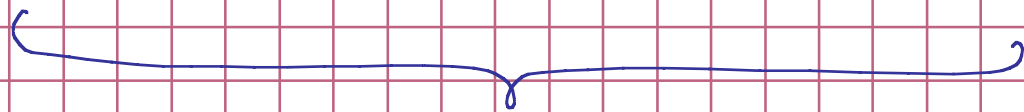
verifichiamo che $f(x) = f_A(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i^{(m)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i f(e_i^{(m)}) = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j^{(m)}$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i \right) e_j^{(m)}$$

$$(A \cdot x)_j$$



$$A \cdot x = f_A(x)$$



4.5.3

$$V = \mathbb{R}^4$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$Z: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$\dim(W)$... extraia base I, II, III

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 7 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$$

$$\beta = 6/5$$

$$\alpha = 1 + 2\beta = 17/5$$

$$-\frac{6}{5} + 5 \cdot \frac{17}{5} \neq -1 \quad \text{No} \quad \Rightarrow \dim W = 3$$

$$\dim Z = 4 - 2 = 2$$

Possible:

$$3 + 2 = \dim(W \cap Z) + \dim(W + Z)$$

2

3

1

4

$W \cap \mathbb{Z}$: Considero un generico elem. di W

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e impongo che stia in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 2(a+3b+7c) + (2a-4b+2c) - 3(-a+5b-c) + 5(3a+b-c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+3b+7c) - 1(2a-4b+2c) + 2(-a+5b-c) + (3a+b-c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22a - 8b + 14c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 24b + 16c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -12b - 8c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -140b - 74c = 0 \end{cases}$$

$\dim(Z \cap W) = 1$; base

$$b = 37$$

$$c = -70$$

$$a = \sqrt{3}$$

base $\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 37 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 70 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

Per verificare che $W + Z = \mathbb{R}^4$:

trovo base z_1, z_2 di Z e estraggo da

$$w_1 \ w_2 \ w_3 \ z_1 \ z_2 \rightsquigarrow * * * *$$

4.5.5

$$V = \mathbb{R}^5$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\dim W = 2$$

$$Z : \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\dim Z = 3$$

Possibilities:

$$2 + 3 = \dim(W \cap Z) + \dim(W + Z)$$

2	3
1	4
0	5

ZOW:

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0(2a+5b) + 1(a+2b) + 1(-a-b) - 1(3a+b) + 1(4a-b) = 0 \\ 1(2a+5b) - 1(a+2b) + 3(-a-b) - 1(3a+b) + 2(4a-b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=0 & a=b=0 \\ a-3b=0 \end{cases}$$

$$Z \cap W = \{0\} \quad Z + W = \mathbb{R}^5$$

Verify the formula $\dim$ dimensions:

5.1.2

$$(b) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot x$$

Possibilität:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

3	0
2	1
1	2

$$\text{Ker } f: \begin{cases} x_3 = 4x_1 + 3x_2 \\ 27x_1 - 11x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \text{Span} \begin{pmatrix} 11 \\ 27 \\ 145 \end{pmatrix} \quad \dim(\text{Ker}(f)) = 1.$$

Oss: se $f: V \rightarrow W$ lineare e $v_1, \dots, v_m$ base di V allora $f(v_1), \dots, f(v_m)$ sono generatori di $\text{Im}(f)$:

$$w \in \text{Im}(f) \Rightarrow w = f(v)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w &= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_m f(v_m) \end{aligned}$$

oss : se $A \in M_{m \times n}$ un insieme di parametri
 di $\text{Im}(f_A)$ è $f_A(e_1), \dots, f_A(e_n)$
 = le colonne di A .

Per noi : $\text{Im}(f) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

✓

✓

✗

$$\Rightarrow \dim(I_{\mathbb{A}}(f)) = 2$$

————— 0 —————