

30/11/17

6.3.1 (f)

Scrivere l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-2) + 2[(-4) - 3] = -14$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{14} B$$

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_j^i)$$

$$B_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$B_{12} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$B_{13} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$B_{14} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$B_{21} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -(4 + 3) = -7$$

Solution: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{14} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{7} & \frac{9}{14} & \frac{5}{14} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

1-

$$\underline{6 \cdot 3 \cdot 2} \quad (b)$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 26 \\ -3x + 2y + 7z = 17 \\ 4x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 26 \\ -3 & 2 & 7 & 17 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A

b

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 13 \\ 10 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 130 = -122 \neq 0$$

$$I_c \rightarrow I_c + II_c$$

$$III_c \rightarrow III_c + 3II_c$$

$\Rightarrow$ il sistema ha sol. e la sol. è unica.

Metodo di Cramer: si applica quando

A è quadrata e $\det(A) \neq 0$,

Indichiamo con $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la sol. del sistema.

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 26 & -1 & 3 \\ 17 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-488}{-122} = 4$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 26 & 3 \\ -3 & 17 & 7 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{-122} = \frac{-366}{-122} = -3$$

$$z = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 26 \\ -3 & 2 & 17 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-610}{-122} = 5$$

$$\underline{6.3.2} \quad (c)$$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 7z = 2 \\ -3x + 5y + z = -1 \\ 10x - 13y + 5z = 4 \end{cases}$$

$$A \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 7 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & -1 \\ 10 & -13 & 5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow z$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 25 & -38 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 25 & -38 & 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rk}(A) < 3$$

Si vuole $\text{rk}(A) = 2$: Per decidere se c'è
 o no, esaminiamo le matrici compilate:

Criterio degli orlati: $\text{rk}(A) = 2$

⇔ tutti i minori di A che contengono
 $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ hanno
 $\det = 0$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 10 & 5 & +4 \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\det A = 0 \right. \\ \left. \text{e'averemo} \right. \\ \left. \text{già verificato} \right)$$

ho: $\text{III}_R = \text{I}_R - 2\text{II}_R \Rightarrow \det = 0.$

Quindi: $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = 2 \Rightarrow$ il
 sistema ha sol. e la sol. non è unica.
 Elimino la III riga e risolvo?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 7 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Sol. (x sostituzione):

$$\begin{cases} x = -\frac{38}{11}z + \frac{7}{11} \\ y = -\frac{25}{11}z + 2 \\ z = z \end{cases}$$