Algebra Lineare 29/11/17

Teo: data $A \in M_{m \times n}$ se esiste C sottomatr. $r \times r$ t.c. $\det(C) \neq 0$ e $\det(B) = 0$ $\forall B$ orlata di C, allora $\text{rank}(A) = r$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 11 & 10 \\ \boxed{-1} & 2 & -5 & \boxed{-4} & 1 \\ 2 & -5 & 12 & 8 & -3 \\ \boxed{4} & 1 & 2 & \boxed{7} & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 98 + 21 + 28 - 11 - 88 - 48 = 147 - 147 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 1 & 11 \\ -1 & -5 & -4 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \dots = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 11 & 10 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \dots = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 9 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \dots = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 2 & 12 & 9 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \dots = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 2 & 9 & -3 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \dots = 0$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(A) = 2.$$

Dim: Osservo che il rango non cambia facendo scambi di colonne (ovvio) o di righe (uno scambio di righe sostituisca A con $T \cdot A$

$T \in M_{m \times m}$ $\qquad T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \boxed{0} & & & & \boxed{1} & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & \boxed{1} & & & & \boxed{0} & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

T bigettiva $\Longrightarrow \operatorname{rank}(T \cdot A) = \operatorname{rank}(A)$.

So che esiste C sottomatr. $r \times r$ con $\det(C) \neq 0$ e $\det(B) = 0$ $\forall B$ orlate di C. Operando scambi di righe e/o colonne suppongo C sia l'angolo $r \times r$ in alto a sinistra di A:

$$A = \begin{array}{c} r\left\{ \vphantom{v_1} \right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & \cdots & v_r & w_{r+1} & \cdots & w_m \\ \hline a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,r} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{m,m} \end{array} \right) \qquad C = (v_1, \dots, v_r)$$

Sappiamo: $\det(v_1, \dots, v_r) \neq 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_r$ base di $\mathbb{R}^r$.

Sicuramente le prime r colonne di A sono lin. indip.: se ho comb. lin. nulla con coeff $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ delle prime r colonne di A ho in part. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. Ho provato: $\operatorname{rank}(A) \geq r$.

Affermo che per ogni $j > r$ la j-esima col. di A è comb. lin. delle prime r: fatto questo ho finito.

Preso $i > r$ considero l'orlato B di C ottenuto aggiungendo riga i e colonna j:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & \dots & v_r & w_j \\ & & & \\ \hline a_{i,1} & \dots & a_{i,r} & a_{i,j} \end{array}\right).$$

So che $\det(B) = 0$; le prime r col. di B sono lin. indip $\Longrightarrow$ l'ultima colonna è comb. lin. delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} w_j \\ a_{i,j} \end{pmatrix} = \beta_1^{(i,j)} \begin{pmatrix} v_1 \\ a_{i,1} \end{pmatrix} + \dots + \beta_r^{(i,j)} \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ a_{i,r} \end{pmatrix}.$$

Ora noto che ho $w_j = \beta_1^{(i,j)} v_1 + \dots + \beta_r^{(i,j)} v_r$

ma so che $v_1, \dots, v_r$ sono base di $\mathbb{R}^r$

dunque $$\begin{pmatrix} \beta_1^{(i,j)} \\ \vdots \\ \beta_r^{(i,j)} \end{pmatrix} = \underbrace{[w_j]_{(v_1, \dots, v_r)}}$$

$\Rightarrow$ non dipendono da i

Poiché qui i non c'è e le coord sono uniche

$$\begin{pmatrix} w_j \\ a_{i,j} \end{pmatrix} = \beta_1^{(j)} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ a_{i,1} \end{pmatrix} + \dots + \beta_r^{(j)} \begin{pmatrix} v_r \\ a_{i,r} \end{pmatrix}$$

$i = r+1, \dots, m$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_j \\ a_{r+1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \beta_1^{(j)} \begin{pmatrix} v_1 \\ a_{r+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + \beta_r^{(j)} \begin{pmatrix} v_r \\ a_{r+1,r} \\ \vdots \\ a_{m,r} \end{pmatrix}$$

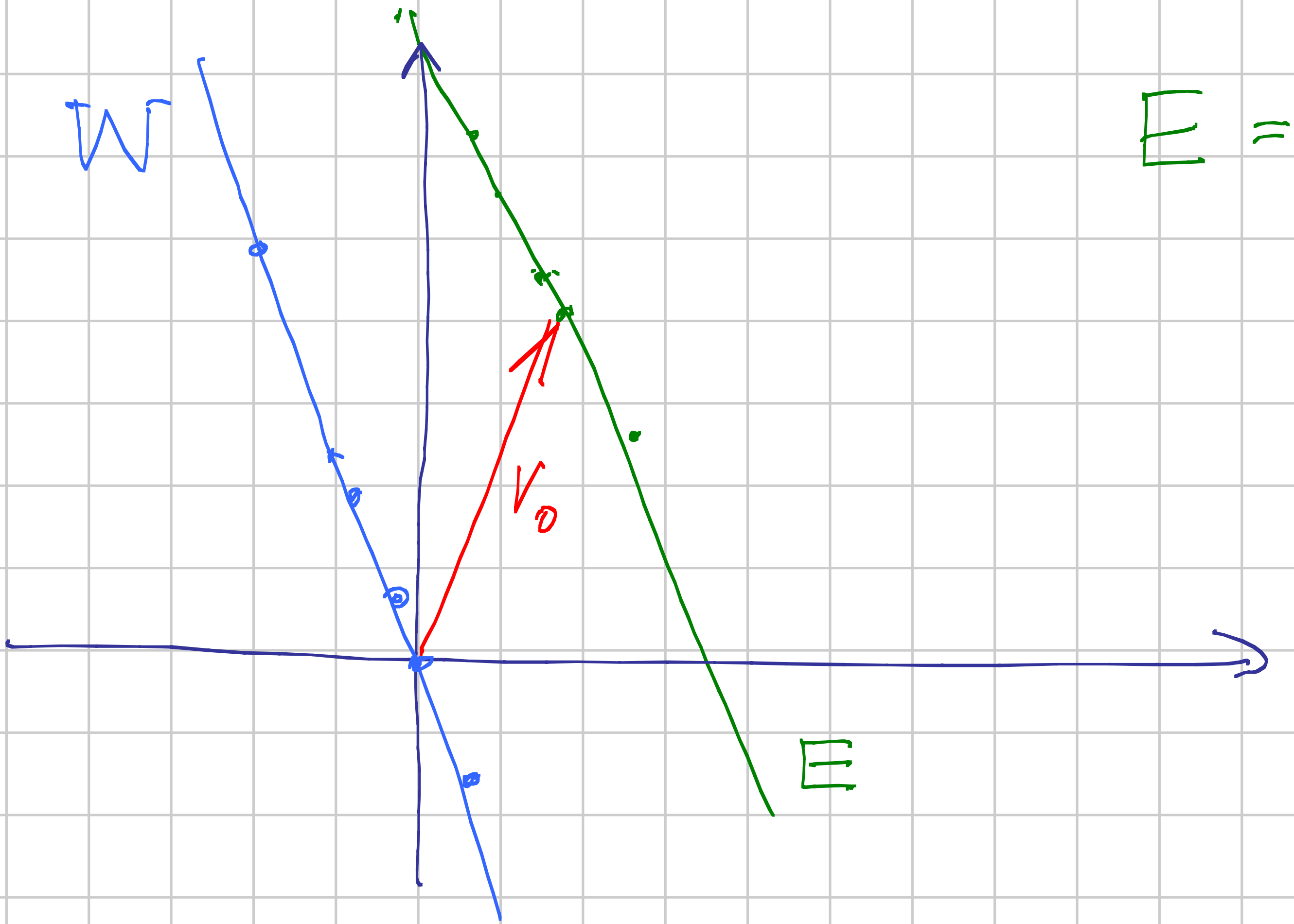
Ho espresso j-esima colonna di A come comb.

lineare delle prime r. $\blacksquare$

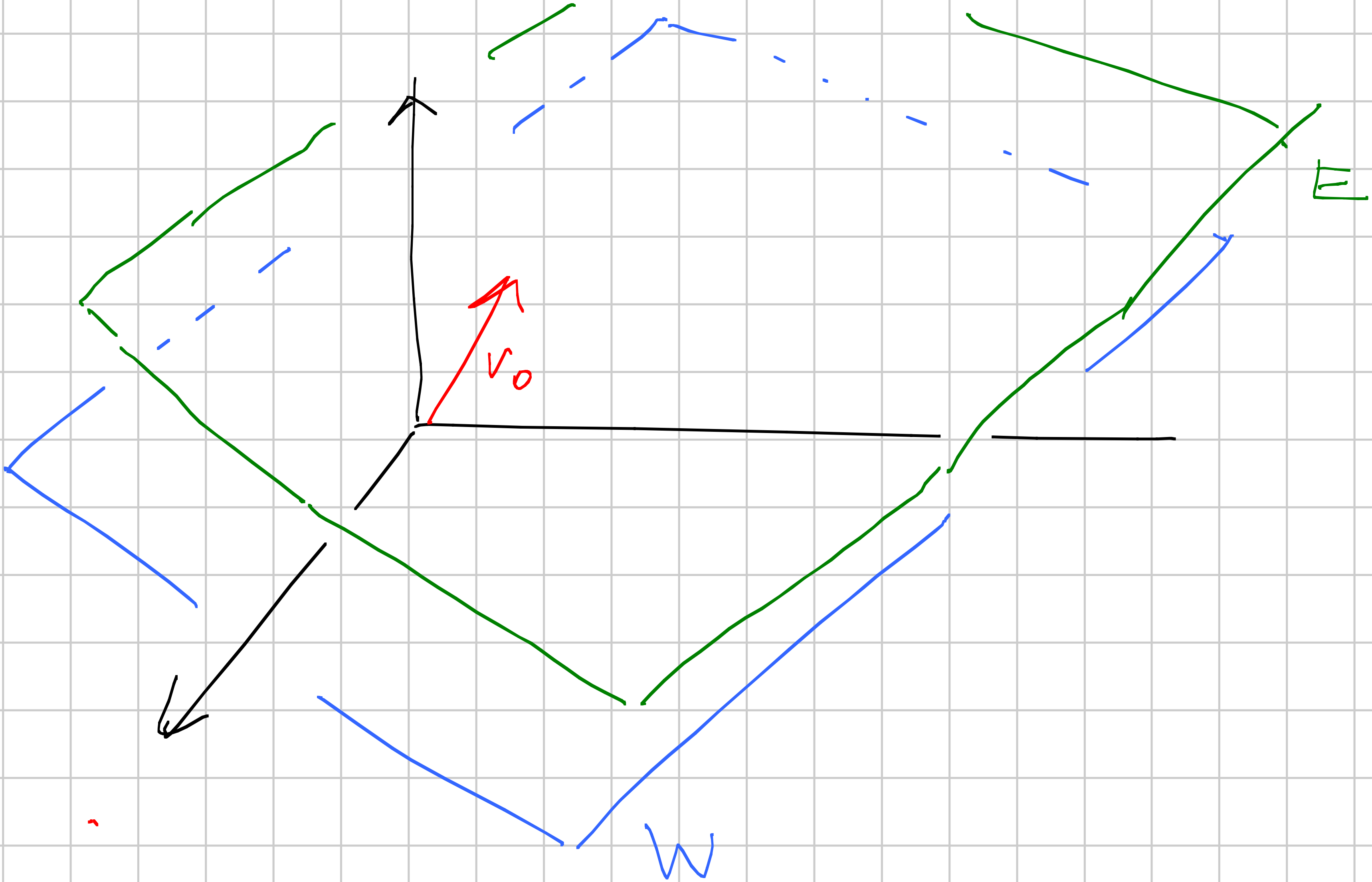
———— o ————

Sottospazi affini

Def: dato V sp. vett. chiamo stsp. affine di V un insieme del tipo $E = \{v_0 + w : w \in W\}$ dove $v_0 \in V$ è un vettore fissato e $W \subset V$ è stsp. affine fissato. Scrivo $E = v_0 + W$.

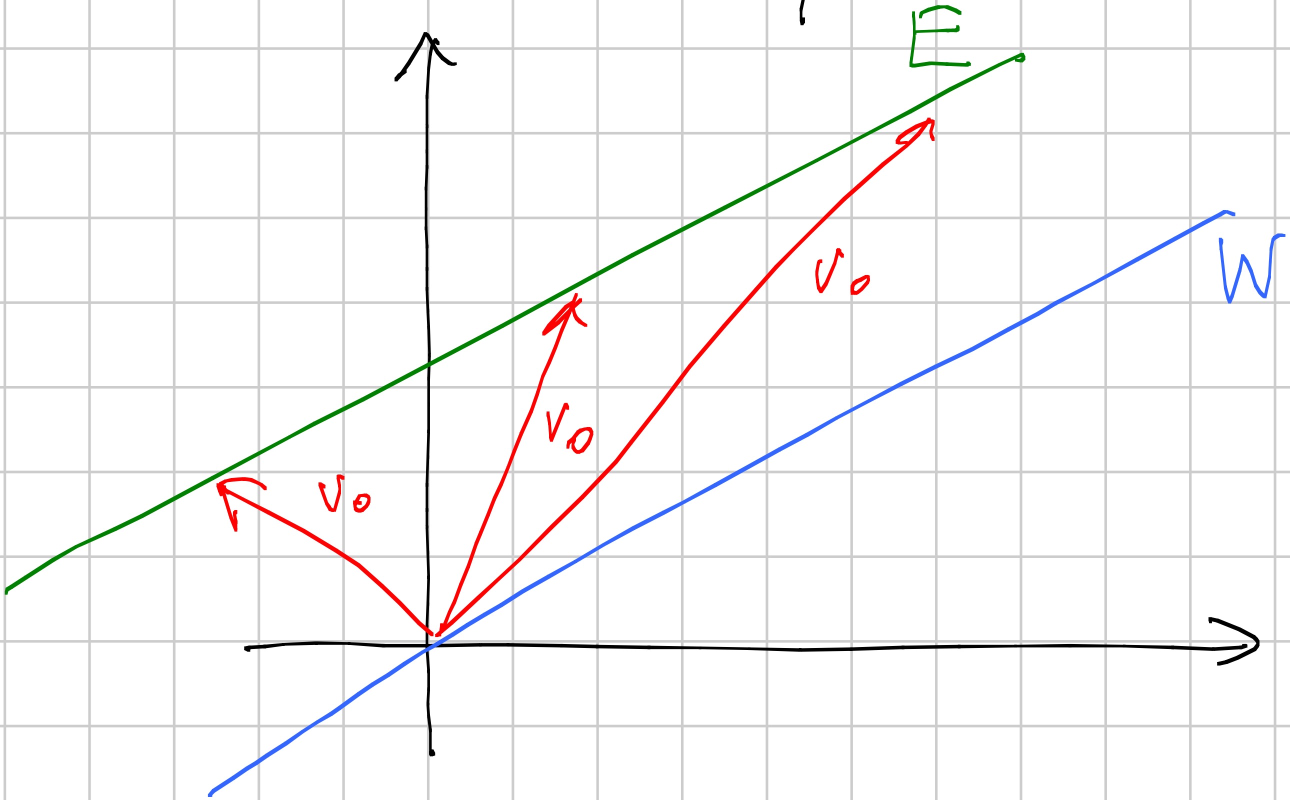


E = il traslato di W di vettore v_0



E
v_0
W

Q: l'insieme E quanto determina v_0, W?



W unica

Prop: $E = v_0 + W_0$ e $E = v_1 + W_1$

$\Updownarrow$

. se $W_0 = W_1$ e $v_0, v_1 \in E$ _

<u>Dim</u> : $\Downarrow$: $0 \in W_0$ ho $v_0 = v_0 + 0 \in E$

$0 \in W_1$ ho $v_1 = v_1 + 0 \in E$

Inoltre $v_1 \in E \Longrightarrow v_1 = v_0 + w_0 \Longrightarrow v_1 - v_0 = w_0 \in W_0$

$v_0 \in E \Longrightarrow v_0 = v_1 + w_1 \Longrightarrow v_0 - v_1 = w_1 \in W_1$.

Sia $u_0 \in W_0$ qualsiasi ; poiché

$v_0 + u_0 \in E$ ho $v_0 + u_0 = v_1 + u_1$, $u_1 \in W_1$

$$\Rightarrow u_0 = v_1 - v_0 + u_1 = \underset{\substack{\cap \\ W_1}}{-w_1} + \underset{\substack{\cap \\ W_1}}{u_1} \Rightarrow u_0 \in W_1$$

Ho provato che $W_0 \subset W_1$.

Analogamente $W_1 \subset W_0 \Rightarrow W_1 = W_0$.

Esercizio.

Stsp. affine = traslato di stsp. vett.

Sttosp. affini di $\mathbb{R}^n$:

- Presentazione parametrica:

se $E = v_0 + W$ e $w_1, \dots, w_k$ sono generatori di W chiamo presentaz. param. la scrittura

$$E = v_0 + \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$$
$$= \{ v_0 + t_1 w_1 + \dots + t_k w_k \ : \ t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R} \}$$

Es: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad E = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

scrivo anche

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 + 2t_1 - t_2 \\ -3 + t_1 + 4t_2 \\ 4 + 5t_1 + 3t_2 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E : \begin{cases} x_1 = 7 + 2t_1 - t_2 \\ x_2 = -3 + t_1 + 4t_2 \\ x_3 = 4 + 5t_1 + 3t_2 \end{cases}$$

le chiamo tutte e tre presentaz. param.

Def: se $E = v_0 + W$ chiamo W giacitura di E.

Chiamo inoltre $\dim(E)$ la $\dim(W)$.

Oss: visto che se v_0 è una soluz. del sist. lin.

$A \cdot x = b$ si ha $\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\} = v_0 + \mathrm{Ker}(A)$

$\Longrightarrow$ l'insieme delle soluz. di un sist. lineare, se non vuoto, è stsp. affine di $\mathbb{R}^n$.

Chiamo presentazione cartesiana di E la sua espressione come $E = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$.

Es: $E = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -9 \end{array} \}$

$E : \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -9 \end{cases}$

le chiamo tutte e due presentaz. cartesiane.

Prop: un stsp. affine E di $\mathbb{R}^n$ con $\dim(E) = k$ ammette presentazioni parametriche con k parametri (oppure di più) e presentaz. cart.

con $n-k$ equaz. (oppure di più).

Dim: $E = v_0 + W$; $\dim(W) = k$.

Se prendo $w_1, \dots, w_k$ base di W ho la presentaz parametrica $E: v_0 + t_1 w_1 + \dots + t_k w_k$. Se prendo $u_1, \dots, u_p$ generatori di W ho anche $E: v_0 + t_1 u_1 + \dots + t_p u_p$ necessariamente $p \geq k$.

Caso presentaz. cartesiana $E: A \cdot x = b$.

Voglio che $W = Ker(A)$ e $v_0 \in E$

dunque $b = A \cdot v_0$. Dunque basta trovare A

t.c. $Ker(A) = Span(w_1, \dots, w_k)$. Completo

$w_1, \dots, w_k$ a base $w_1, \dots, w_n$ di $\mathbb{R}^n$ e

definisco $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-k}$ t.c.

$$f(w_j) = \begin{cases} 0 & j = 1, \dots, k \\ e_{j-k} & j = k+1, \dots, m \end{cases}$$

Ho $Ker(f) = Span(w_1, \dots, w_k)$;

basta porre $A = [f]_{\mathcal{E}^{(n)}}^{\mathcal{E}^{(n-k)}}$.

Ho $n-k$ equazioni. Aggiungendo loro comb. lin. ho anche presentaz. con più equazioni, ma non meno di $n-k$;

se ho presentaz. con h equazioni con matrice A ho $\operatorname{rank}(A) \leq h$

$\Longrightarrow \dim(\operatorname{Ker}(A)) \geqslant n-h \Longrightarrow k \geqslant n-h \Longrightarrow h \geqslant n-k.$

$\blacksquare$

Es: piano in $\mathbb{R}^3$

$$E: \begin{cases} x_1 = 7 - 2t_1 + 4t_2 \\ x_2 = 4 + 5t_1 - t_2 \\ x_3 = -9 + t_1 + 6t_2 \end{cases}$$

dim = 2
2 parametri

$$E: \begin{cases} x_1 = 7 - 2t_1 + 4t_2 + 2t_3 \\ x_2 = 4 + 5t_1 - t_2 + 4t_3 \\ x_3 = -9 + t_1 + 6t_2 + 7t_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es: retta in $\mathbb{R}^3$

$$E: \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -9 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = +8 \end{cases}$$

dim = 1
3 − 1 = 2
equaz.

$$E: \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -9 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = +8 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = -17 \end{cases}$$

Q: come passare da pres. cart. a param. e viceversa?

$\boxed{\text{Cart} \to \text{param}}$ = risolvere il sistema

__Es:__ $E \subset \mathbb{R}^4$

$$E: \begin{cases} 2x - y + 4z - 6w = 3 \\ 5x + 2y - 7z + 3w = -1 \end{cases}$$

$$\dim = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{cases} y = 2x + 4z - 6w - 3 \\ 5x + 4x + 8z - 12w - 6 - 7z + 3w = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x + z - 9w = 5 \\ y = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -9x + 9w + 5 \\ y = 2x - 36x + 36w + 20 - 6w - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -34x + 30w + 27 \\ z = -9x + 9w + 5 \end{cases}$$

$$E: \begin{cases} x = t \\ y = -34t + 30s + 27 \\ z = -9t + 9s + 5 \\ w = s \end{cases}$$

scritture equivalenti

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -34 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\boxed{\text{Param} \rightarrow \text{Cart}}$: eliminare i parametri

Es: $E \subset \mathbb{R}^4$ $E: \begin{cases} x = -1 + 4t - 5\lambda \\ y = 4 + 2t + \lambda \\ z = 7 - t + 8\lambda \\ w = 3 + 5t - 2\lambda \end{cases}$

dim = 2 $\Longrightarrow$ servono $4 - 2 = 2$ equaz.

$$\begin{cases} t = 7 + 8s - z \\ x = -1 + 28 + 32s - 4z - 5s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \dfrac{1}{27}(x + 4z) & -1 \\ t = \dfrac{1}{27}(8x - 19z) & +6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 + \dfrac{1}{27}(16x - 38z + x + 4z) + 12 - 1 \\ w = 3 + \dfrac{1}{27}(40x - 95z - 2x - 8z) + 30 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17x - 27y - 34z = -15 \cdot 27 \\ 38x - 103z - 27w = -35 \cdot 27 \end{cases}$$