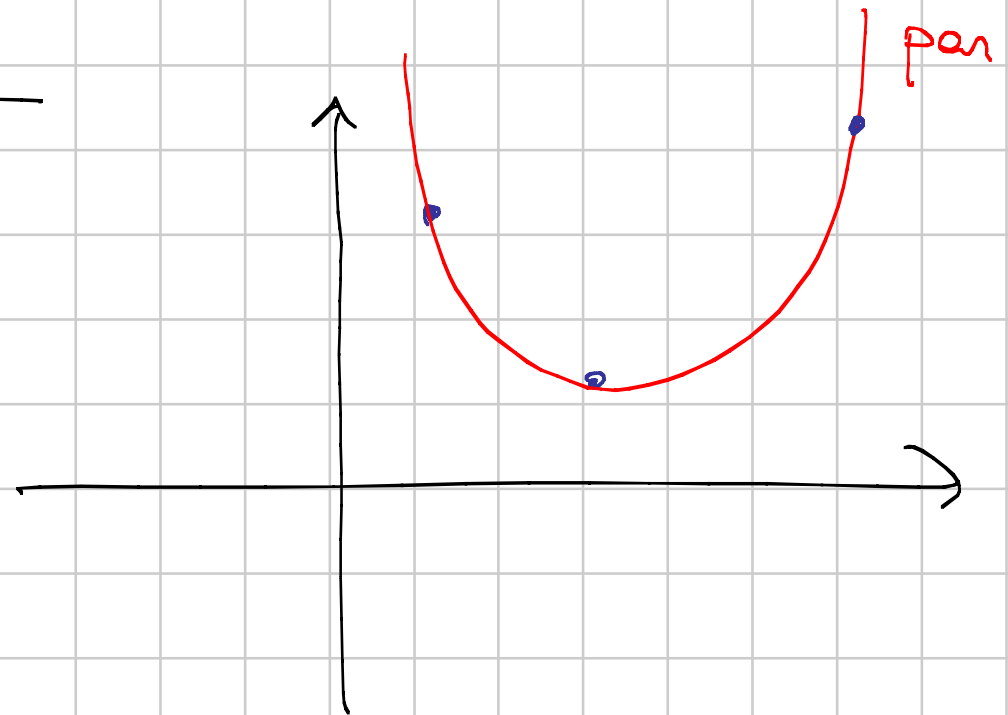
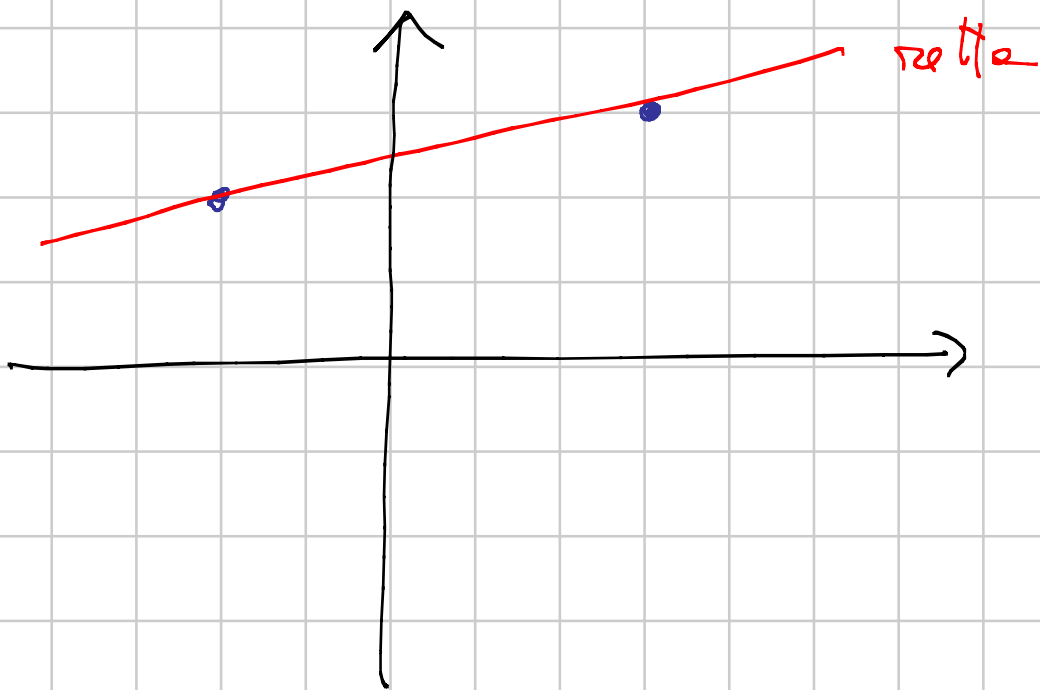
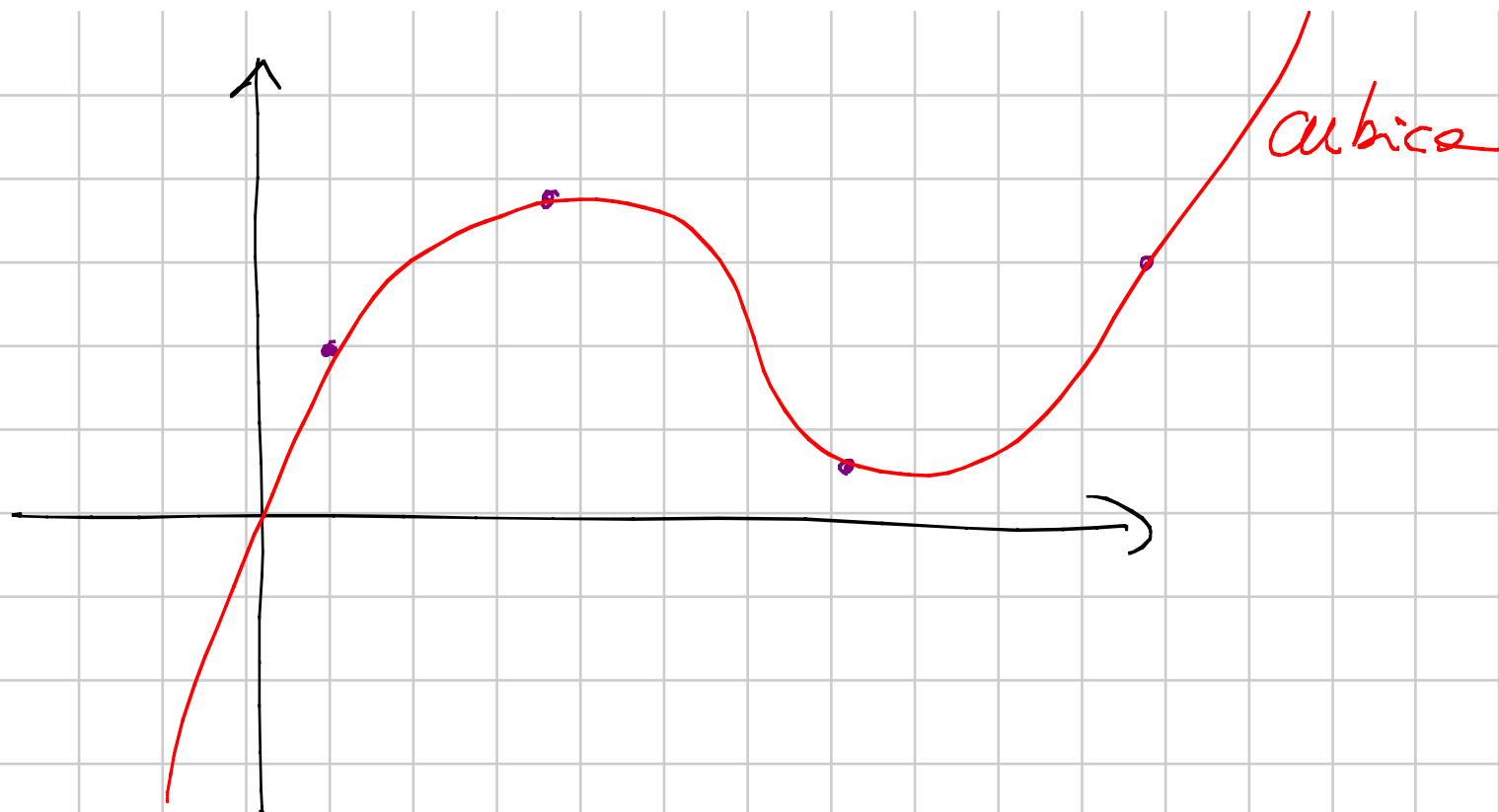


Algebra Lineare 28/11/17 - II

Interpolazione polinomiale





Prop: dati nel piano n punti (x_i, y_i) $i=1..n$
 con ascisse distinte esiste uno e un solo
 polinomio $p(x)$ di grado $n-1$ il cui
 grafico li contiene.

Dim: cerco $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}$

(cioè cerco $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$) t.c.

$$\begin{cases} p(x_1) = y_1 \\ \dots \\ p(x_m) = y_m \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{m-1}x_1^{m-1} = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_m + \dots + a_{m-1}x_m^{m-1} = y_m \end{cases}$$

$$\text{cioè} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

trasp. della matr. di Vandermonde per $x_1, \dots, x_m$

$$\det = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$$

$\Rightarrow$ sist. quadrato con matrice incompleta
invertibile $\Rightarrow$ soluz. unica. □

Prop : $A \in M_{n \times n}$ $\det(A) \neq 0$

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}.$$

Dim: chiamo $x_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}$.

Devo verificare che $X = A^{-1}$ cioè che

$$A \cdot X = I_n \quad \text{e/o} \quad X \cdot A = I_n.$$

Faccio $A \cdot X = I_n$:

$$\begin{aligned} (A \cdot X)_{ij} &= \sum_{h=1}^n a_{ih} x_{hj} = \sum_{h=1}^n a_{ih} (-1)^{h+j} \frac{\det(A^{jh})}{\det(A)} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \underbrace{\sum_{h=1}^n (-1)^{j+h} \cdot a_{ih} \cdot \det(A^{jh})}_{= \det(A)} \end{aligned}$$

Sviluppo lungo la j -esima
riga del det della matrice
ottenuta da A sostituendo
la j -esima riga con la i -esima
$$= \begin{cases} \det(A) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n$$

$\square$

Prop (Cramer): se $A \in M_{n \times n}$ e $\det(A) \neq 0$
la soluz. unica del sistema $A \cdot x = b$ è

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

dove A_i è ottenuta da A sostituendo
la i -esima colonna con b .

Es:
$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 9 \\ -4x + 7y - z = 11 \\ 8x - 6y + 9z = -3 \end{cases}$$

ha soluz:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 11 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 7 & -1 \\ 8 & -6 & 9 \end{pmatrix}} ; y = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 7 & -1 \\ 8 & -6 & 9 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 7 & -1 \\ 8 & -6 & 9 \end{pmatrix}}$$

$$z = \dots$$

Dim: Solut: $x = A^{-1} \cdot b$

$$x_i = (A^{-1} \cdot b)_i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_{ij} \cdot b_j$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)} \cdot b_j$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} b_j \det(A^{ji})$$

sviluppo lungo j -esima col.
di $\det(A^i)$.



Calcolo del rango.

Def: se A è una matrice $\in M_{m \times n}$
chiamo B sottomatrice di A se B è
ottenuta da A cancellando alcune righe
e colonne. Chiamo B ontata di C
se B è sottomatrice di A e C è ottenuta
da B cancellando una riga e una colonna.

Oppure: se C è sottomatrice di A
(ottenuta da A cancellando righe e colonne,

una sottomatrice di A si ottiene riappioppando
una riga e una colonna.

Es: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 & \sqrt{3} & \pi \\ 4 & 9 & 2 & e & -41 \\ -8 & 53 & \sqrt{7} & 0 & -1 \\ 99 & 171 & -\sqrt{2} & 79 & 57 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4 \times 5}$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & e \\ 171 & 79 \end{pmatrix}$$

Le sottomatrici di A in C sono:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & \sqrt{3} \\ 4 & 9 & e \\ 99 & 171 & 79 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 & \sqrt{3} \\ 9 & 2 & e \\ 171 & -\sqrt{2} & 79 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & \pi \\ 9 & e & -41 \\ 171 & 79 & 57 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & e \\ -8 & 53 & 0 \\ 99 & 171 & 79 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 & e \\ 53 & \sqrt{7} & 0 \\ 171 & -\sqrt{2} & 79 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & e & -41 \\ 53 & 0 & -1 \\ 171 & 79 & 57 \end{pmatrix}$$

Teo (depl onlati): se $A \in M_{m \times n}$ ed
esiste una sottomatrice $C \in M_{r \times r}$ t.c.

- $\det(C) \neq 0$

- $\det(B) = 0 \quad \forall B$ onlata di C

allora $\text{rank}(A) = r$.

Algoritmo per il calcolo del rango:

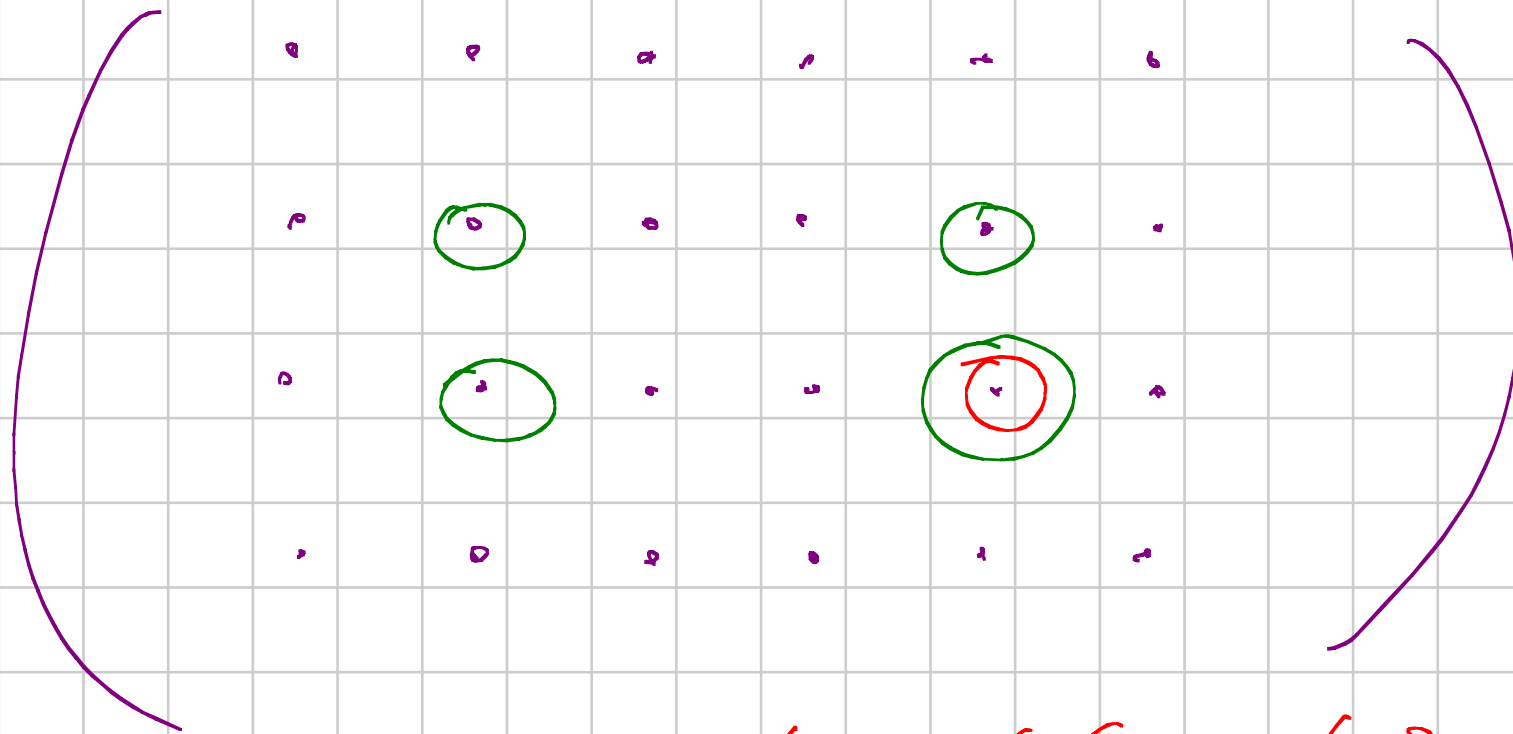
- quando se tutti i coeff. d. A sono 0;
se si il rango è 0; se no fisso
un coeff. $C_1 \neq 0$ (sottomatr. 1×1)

- quando tutte le entrate di C_1 ; se
hanno tutte $\det = 0$ allora $\text{rank} = 1$;
se no fisso una C_2 (sottomatr. 2×2)
con $\det(C_2) \neq 0$

- quando tutte le orlate di C_2 : se hanno tutte $\det = 0$ allora $\text{rank} = 2$; se ho fissato una C_3 (sottomatr 3×3) con $\det(C_3) \neq 0$...

Att: guardando le sottomatri $k \times k$

- non le guardo tutte ma solo le orlate di C_{k-1}
- alla prima con $\det \neq 0$ mi fermo



fulla 2x2 : $\binom{4}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 120$

orloke lella 1x1 : $3 \times 5 = 15$