Algebra Lineare 27/9/17

google + Carlo Petronio (libro: pagina 16/17)

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

operazione $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(n, m) \longmapsto n + m$

1. $n + 0 = n \quad \forall n$ el. neutro

3. $n + (m + k) = (n + m) + k \quad \forall n, m, k$

4. $n + m = m + n$

Opposto: dato n cercare $x \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n + x = 0.$$

Ha soluz. solo per $n = 0$ e $\bar{e}$ $x = 0$.

Interi: $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

1 + 3 + 4 come sopra e

2. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists (-n)$ t.c. $n + (-n) = 0$.

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$ prodotto
$$(n, m) \longmapsto n \cdot m$$

5. $1 \cdot n = n \quad \forall n$

7. $n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$

8. $n \cdot m = m \cdot n$

9. $n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$

Esistenza dell'inverso per $n \neq 0$

$(0 \cdot k = 0 \quad \forall k)$: dato $n \neq 0$ cerco x t.c.

$$n \cdot x = 1 .$$

Ha soluzione per $n = \pm 1$ ed è $x = n$.

<u>Razionali</u> : $\mathbb{Q}$ " $=$ " $\left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$.

attenzione! come frazioni

$$\frac{-9}{15} \neq \frac{6}{-10}$$

dunque bisogna convenire che

$\frac{n}{m} = \frac{k}{h}$ se $n \cdot h = m \cdot k$

Inoltre conveniamo che $\frac{n}{1} = n$;

dunque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Ora valgono le 1-5 7-9 e

6 $\forall q \neq 0 \quad \exists q^{-1}$ t.c. $q \cdot q^{-1} = 1$.

Un insieme F con due operazioni

$+ : F \times F \to F \qquad \circ : F \times F$

si chiama <u>campo</u> se:

1. $\exists\, 0$ t.c. $0 + x = x \quad \forall x$
2. $\forall x \ \exists (-x)$ t.c. $x + (-x) = 0$

$F, +, 0$ è un

3. $x+(y+z) = (x+y)+z \quad \forall x,y,z$

4. $x+y = y+x$

5. $\exists 1$ t.c. $1 \cdot x = x \quad \forall x$

6. $\forall x \neq 0 \quad \exists x^{-1}$ t.c. $x \cdot x^{-1} = 1$

7. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

8. $x \cdot y = y \cdot x$

9. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

gruppo commutativo

$F \setminus \{0\}, \cdot, 1$ è un gruppo commut.

distrib.

Oss: $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$

hanno motivaz. algebriche (soluz. di equaz).

Anche in $\mathbb{Q}$ ci sono equaz. prive di soluz.
ad es. $x^2 = 2$.

Passiamo ai numeri <u>reali</u> ma non solo
per motivaz. algebriche. Si nota
che si può far corrispondere $\mathbb{Q}$ e
un sottoinsieme di punti di una retta
su cui sono fissati $0 \neq 1$.

Chiamo $\mathbb{R}$ tutti i punti della retta (dunque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$). Fatto: le operaz. $+, \cdot$ di $\mathbb{Q}$ si estendono a $\mathbb{R}$ con le proprietà 1-9 precedenti (dunque $\mathbb{R}$ è un campo). Esempi di numeri in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono: $\sqrt{2}$, π, e . . .

Def: chiamo algebrico un numero reale che è radice di un polinomio a coeff interi (o razionali). Ad es

$\sqrt[5]{17}$ radice di $t^5 - 17$

Fatto: se prendo un punto a caso su $\mathbb{R}$ c'è probabilità nulla che esso sia algebrico.

Ad es. π, e non sono algebrici.

Polinomi: $\mathbb{R}[t]$ = polinomi a coeff reali nella indeterminata t.

Es. $\sqrt{3} - 2t + 5t^2 - \frac{17}{3}t^3 + \pi t^4$

$$\mathbb{R}[t] \text{ "="} \Big\{ \underbrace{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n}_{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k} : n \in \mathbb{N},\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \Big\}$$

Però:

- $\underbrace{\sqrt{7}}_{\text{non}} - \frac{t}{e} + \frac{13}{2}t^3$ lo identifico a una scrittura come sopra $\quad \sqrt{7} - t + 0 \cdot t^2 + \frac{13}{2} t^3$

- $-7 + t + \sqrt{e}\, t^2 \neq -7 + t + \sqrt{e}\, t^2 + 0 \cdot t^3$

invece li identifichiamo.

Morale: conveniamo che si possono aggiungere o togliere monomi con coeff. nullo.

Def: grado:

$$\deg(\underbrace{a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n}_{\neq 0}) = \max\{k : a_k \neq 0\}$$

se $\neq 0$. Convenzione: $\deg(0) = -\infty$

Sui polinomi ho commesso operazioni

$$+ : \mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$$

"somma i coeff dei monomi simili"

$$\cdot : \mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$$

"applico la distributiva

e poi somma ''

$$(7-3t+4t^2)+(5-t-2t^2+\sqrt{3}\,t^3)$$

$$= 12-4t+2t^2+\sqrt{3}\,t^3$$

$$(3-t)(2+t-7t^2) = 6+3t-21t^2$$
$$-2t-t^2+7t^3$$

$$= 6+t-22t^2+7t^3$$

In generale:

$+)$ $\quad p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \qquad q(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots$$

complicato da scrivere
(dovrei distinguere $n \leq m$
da $n \geq m$)

Trucco: scriviamo $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ come

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ convenendo che $a_k = 0$ per $k > n$.

Quindi polinomio è $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ in cui solo un numero finito di a_k è $\neq 0$.

$\left(1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\right.$ non è polinomio$\left.\right)$.

Ora: $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k\right)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) t^k$$

•) $\left(\sqrt{3} - 5t + 6t^2 - \frac{3}{2}t^3\right)\left(2 + 3t - 7t^2 + 9t^3 + \frac{11}{4}t^4\right) =$

$$\left(\deg(p(t) \cdot q(t)) = \deg(p(t)) + \deg(q(t)) \right.$$

$$\left. \text{so } p(t) = 0 \qquad \overset{\shortparallel}{-\infty} \qquad = \quad -\infty + * \right)$$

$$= (\quad)t^0 + (\quad)t^1 + (\quad)t^2 + (\quad)t^3 + (\quad)t^4 + (\quad)t^5 + (\quad)t^6 + (\quad)t^7$$

$$3 \cdot \frac{11}{4} + (-5) \cdot 9 + 6 \cdot (-7) + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 3$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{h=0}^{k} a_h b_{k-h}\right) \cdot t^k$$

Dimostrazioni

- Tecnica diretta.

Prop: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\left(0+1+ \dots +1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500 \cdot 1001 = 500500\right)$

Dim: chiamo S_n tale somma. Ho:

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 + 0$$

$$2S_n = \underbrace{n + n + n + \dots + n + n + n}_{n+1}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \boxtimes$$

Induzione: dato un predicato $P(n)$ relativo a un naturale $n \in \mathbb{N}$, per provare che è vero per ogni n basta:

- provare che $P(0)$ è vera (passo base dell'induzione)

• (supponendo $P(n)$ vera per un generico $n \in \mathbb{N}$) (provare che anche $P(n+1)$ è vera)

ipotesi induttiva — tesi induttiva

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{passo induttivo}}$$

Cioè in breve:

PB: $P(0)$ vera

PI: $P(n) \Longrightarrow P(n+1) \quad \forall n$

Perché basta?

$p(0)$: vera per PB

$p(1)$: uso PI con $n=0$ e PB : vera

$p(2)$: uso PI con $n=1$ e fatto già visto che $p(1)$ è vera : vera

⋮

Prop: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dim: per induzione.

PB: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$ vera

PI: suppongo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Devo vedere che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Calcolo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n+1}{2} \cdot (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\boxed{\text{c.v.d.}}$

<u>Dimo per assurdo</u>:

nego la tesi e ne deduco la negazione di un fatto noto come vero oppure dell'ipotesi.

Prop: l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluz. $x \in \mathbb{Q}$.

Dim: per assurdo sia $x \in \mathbb{Q}$ una soluz.

Scrivo tale x ai minimi termini:

$x = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ privi di fattori comuni maggiori di 1.

$$x^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$\Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow$ p è pari

$\Rightarrow p = 2k \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2$

$\Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow$ q è pari.

Assurdo.

$\blacksquare$

Prop: se $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sono terne pitagorica ($a^2+b^2=c^2$) allora almeno uno tra a e b è pari.

Dim: Per assurdo suppongo che a, b siano dispari, cioè $a = 2k+1$, $b = 2h+1$

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2 = (2k+1)^2+(2h+1)^2 =$$
$$= 4k^2+4k+1+4h^2+4h+1$$
$$= 4(k^2+k+h^2+h)+2.$$

Dunque la divisione $(a^2+b^2):4$ ha resto 2.

Ora ho due casi: c pari o dispari:

- c pari, $c = 2n \Rightarrow c^2 = 4n^2$
  $\Rightarrow$ la divisione $c^2 : 4$ ha resto 0

- c dispari, $c = 2n+1 \Rightarrow c^2 = 4(n^2+n)+1$
  $\Rightarrow$ la divisione $c^2 : 4$ ha resto 1.

$\square$

Oss: dimostrare per assurdo una implicazione

$$P \Rightarrow Q$$

significa dimostrare:

$$\underbrace{\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)}_{\text{contronominale di "}P\Rightarrow Q\text{" ed è ad esso equivalente.}}$$

Prop: dato $n \in \mathbb{N}$ ho

n è multiplo di 6 $\Longleftrightarrow$ n è multiplo di 2 e di 3.

Dim: $\underline{\Longrightarrow}$ $n = 6k \Longrightarrow n = 2 \cdot 3k$
$n = 3 \cdot 2k$

$\underline{\Longleftarrow}$ per assurdo supponiamo che n non sia multiplo di 6 e proviamo che non è multiplo di 2 o di 3

n non multiplo di 6 significa che la divisione $n:6$ ha resto 1, 2, 3, 4 o 5.

1) $n = 6k+1 = 2(3k)+1$ $\quad$ $n:2$ ha resto 1

$= 3(2k)+1$ $\quad$ $n:3$ ha resto 1

2) $n = 6k+2 = 3(2k)+2$ $\quad$ $n:3$ ha resto 2

3) $n = 6k+3 = 2(3k+1)+1$ $\quad$ $n:2$ ha resto 1

4) $n = 6k+4 = \cancel{3 \cdot 2k + 4}$

$$= 3(2k+1)+1 \qquad n:3 \text{ ha resto } 1$$

5) $$n = 6k+5 = 2(3k+2)+1 \qquad n:2 \text{ ha resto } 1$$
$$= 3(2k+1)+2 \qquad n:3 \text{ ha resto } 2$$

in tutti i casi è non divisibile per 2 o per 3. $\boxtimes$

———— o ————

Def: chiamo spazio vettoriale reale un insieme V dotato di due operazioni

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(v, w) \longmapsto v+w \qquad (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v \quad \text{t.c.}$$

1. $\exists\, 0 \in V$ t.c. $v + 0 = v \quad \forall v \in V$
2. $\forall v \in V \ \exists (-v)$ t.c. $v + (-v) = 0$
3. $v + (w+z) = (v+w)+z \quad \forall v, w, z \in V$
4. $v + w = w + v \quad \forall v, w \in V$

$V, +, 0$ è gruppo commutativo.

5. $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

6. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

7. $\lambda (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

8. $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$.

<u>Oss</u>: descrivere uno sp. vett. richiede

- dire chi è V
- dire chi sono $+$, $\cdot$
- dire chi è $0 \in V$.

Oss: l'operaz. $\cdot$ di sp vett. è detta prodotto per scalare (scalare = numero).

Esempi:

- $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ con

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nuovi

vecchi di $\mathbb{R}$

Verifichiamo la 7:

$$\lambda \cdot (x+y) \overset{?}{=} \lambda \circ x + \lambda \circ y$$

$$\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda (x_1 + y_1) \\ \vdots \\ \lambda (x_n + y_n) \end{pmatrix}$$

$$\lambda \circ x + \lambda \circ y = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \lambda y_n \end{pmatrix}$$

quindi per le distributive in $\mathbb{R}$

- $$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{R} \\ i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{array} \right\}$$

con

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ex:
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\cap$$

$$\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ -2 & 10 \\ 4 & 22 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ = spazio delle matrici a coeff $\mathbb{R}$ con m righe e n colonne.

Scriviamo

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

indice di riga

indice di colonna

numero righe

numero colonne

Inoltre definiamo $(A)_{ij}$ come a_{ij}.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & -2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & -11 \\ 9 & 6 & \sqrt{17} \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

$$(A)_{23} = \underline{1} \qquad (A)_{42} = 6$$

Le def di $+$, $\cdot$, 0 sono:

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

$$(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot (A)_{ij}$$

$$(0)_{ij} = 0$$

Verifichiamo 4:

$$A+B \overset{?}{=} B+A$$

sono matrici $m \times n$

dunque basta vedere che in ogni posto i,j

hanno stesso coeff!

$$(A+B)_{ij} = (B+A)_{ij}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$(A)_{ij}+(B)_{ij} \qquad (B)_{ij}+(A)_{ij}$$

quindi per commut del + in $\mathbb{R}$.

Def: Se V è uno spazio vettoriale e $W \subset V$ dico che W è un sottospazio vettoriale se

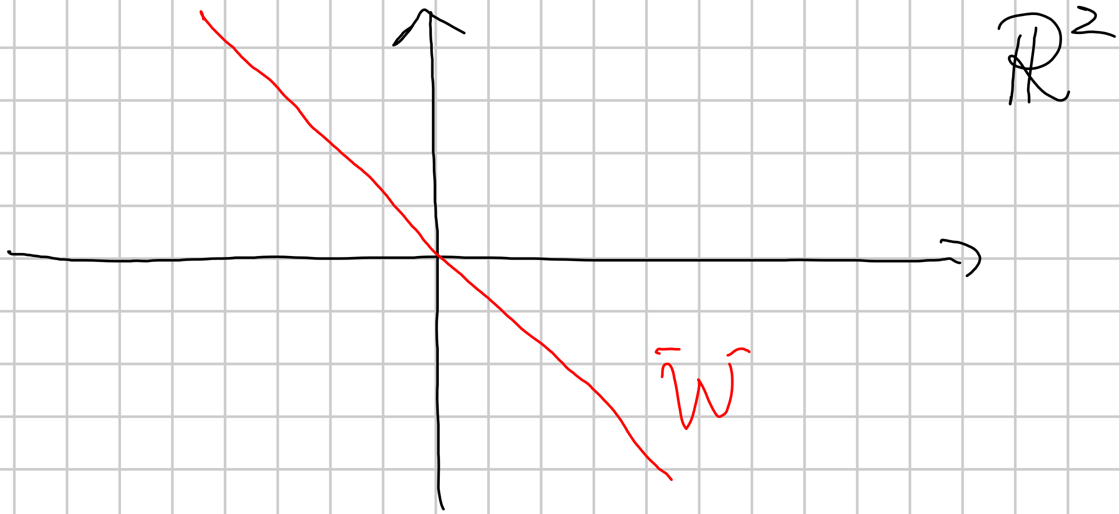
1. $0 \in W$
2. $w_1, w_2 \in W \Longrightarrow w_1 + w_2 \in W$
3. $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Longrightarrow \lambda \cdot w \in W$.

Oss: tale W è a sua volta uno spazio vettoriale con le operazioni ereditate da V

(le proprietà 1-8 discendono da quelle di V)

Es: $W = \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \}$

$n = 2$



Dico che è un sottospazio:

1. $0 \overset{?}{\in} \tilde{W}$ $\qquad 0 + \dots + 0 = 0$ ✓

2. $x, y \in W \overset{?}{\Longrightarrow} x + y \in W$

$\Downarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x+y)_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$= 0 + 0 = 0$$

3. $\lambda \in \mathbb{R}, x \in W \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \cdot x \in W$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda x)_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda \cdot 0 = 0$$