

Algebra Lineare 26/10/17

$$\underbrace{A \cdot B}_{m \times k}$$

A is $m \times m$, B is $m \times k$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih} b_{hj}$$

→ distributive rispetto a +
→ associativa

Commutative?

$$\begin{array}{cc}
 A \cdot B & ? & B \cdot A \\
 m \times m & m \times k & m \times k \quad m \times m \\
 \underbrace{m \times m \quad m \times m} & & \underbrace{m \times m \quad m \times m} \\
 m \times m & & m \times m \\
 \text{devono essere uguali} & &
 \end{array}$$

Date $A, B \in M_{m \times m}$ è vero che $A \cdot B = B \cdot A$? No.
 (Se $m=1$ sì.)

$n \geq 2$: tipicamente no

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

No

Def: chiamiamo matrice identica $n \times n$ la

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prop: $A \cdot I_n = A$

$$I_n \cdot A = A$$

ogni volta che
il prodotto ha
senso

Delta di Kronecker:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{se } \alpha = \beta$$

$$\text{se } \alpha \neq \beta$$

QSS: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ si può definire così:

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$$

QSS: $E_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$$(E_{\alpha\beta})_{ij} = \delta_{i\alpha} \cdot \delta_{j\beta}$$

Dim:

$$\underbrace{A \cdot I_m}_{m \times m} \neq \underbrace{A}_{m \times m}$$

$$(A \cdot I_m)_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih} (I_m)_{hj} = \sum_{h=1}^m a_{ih} \cdot \delta_{hj}$$

(sopravvive solo l'addendo con $h=j$)

$$= a_{ij}.$$



————— 0 —————

Somma diretta

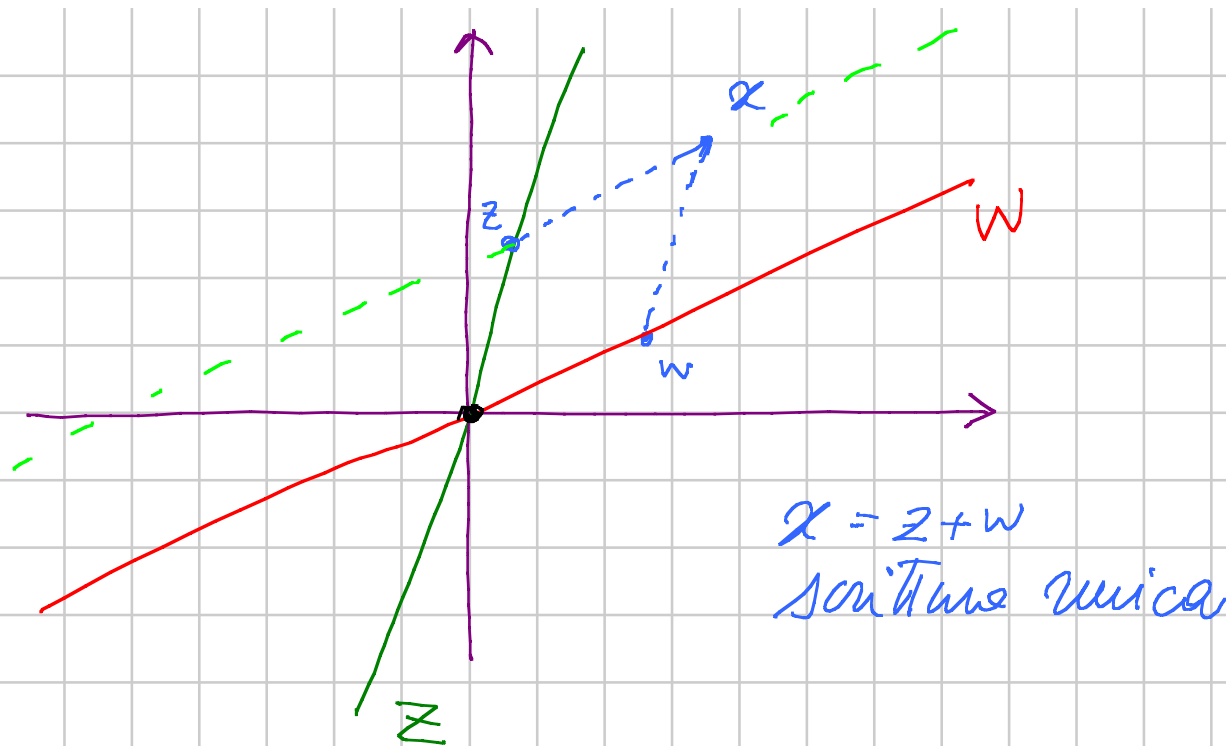
Ricordo: se $Z, W \subset V$ sono sottosp.

$$\begin{aligned} Z \cap W &\text{ è sottosp, } Z+W = \text{Span}(Z \cup W) \\ &= \{z+w : z \in Z, w \in W\} \end{aligned}$$

$$\dim(Z) + \dim(W) = \dim(Z \cap W) + \dim(Z+W).$$

Def: dico che V è somma diretta di Z e W ,
scrivere $V = Z \oplus W$ se $Z \cap W = \{0\}$ e $Z+W = V$.

E_s:
 $V = \mathbb{R}^2$



$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 0 + 2 \\ &\parallel \\ &\dim(Z+W) \\ &\Downarrow \\ &Z+W = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Prop: 1) se $V = W \oplus Z$ allora $\dim(V) = \dim(W) + \dim(Z)$

2) se $\dim(V) = \dim(W) + \dim(Z)$ ho $Z \cap W = \{0\} \Leftrightarrow W + Z = V$

3) Se $V = W \oplus Z$ ogni $v \in V$ ha espressione unica come $v = w + z$
 $w \in W, z \in Z$.

Dim: 1), 2) seguono da Grassmann.

3) Esistenza dell'espressione: segue da $V = W + Z$.
Unicità:

Sia $v \in V$ scritto come $v = w_1 + z_1$
 $v = w_2 + z_2$

$$\Rightarrow w_1 + z_1 = w_2 + z_2 \Rightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1$$

$\begin{matrix} \nearrow \\ W \end{matrix}$ $\begin{matrix} \nearrow \\ Z \end{matrix}$

$$\Rightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1 \in W \cap Z = \{0\}$$

$$\Rightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1 = 0 \Rightarrow w_2 = w_1, z_2 = z_1. \quad \square$$

Def: se $V = W \oplus Z$ chiamo proiezioni associate alla decomposizione in $\oplus$ le mappe $p, q: V \rightarrow V$ con definite: se $v \in V$, scrivo $v = w + z$
 $w \in W, z \in Z$

e posto $p(v) = w, q(v) = z$ $\left(\begin{array}{l} p \text{ proiez. su } W \\ q \text{ proiez. su } Z \end{array} \right)$

Prop: se $V = W \oplus Z$ e p, q sono le proiezz. associate ho:

$$(1) \quad p \circ p = p, \quad q \circ q = q$$

$$(2) \quad p \circ q = 0, \quad q \circ p = 0$$

$$(3) \quad W = \text{Im}(p) = \text{Ker}(q), \quad Z = \text{Im}(q) = \text{Ker}(p)$$

$$(4) \quad p + q = \text{id}_V$$

($p + q$ è l'applicazione $V \rightarrow V$ t.c. $(p+q)(v) = p(v) + q(v)$.)

Es: $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$

$$Z = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$\dim(W) = 2$$

$$\dim(Z) = 1$$

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$W \cap Z = ?$

$\rightarrow Z$ ~~se il generatore sta in W~~

$\rightarrow \{0\}$ altrimenti

$$7 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = W \oplus Z$$

Cerchiamo τ, η . Dato $x \in \mathbb{R}^3$ vogliamo

$$x = \underbrace{w}_{\substack{\nearrow \\ W}} + \underbrace{z}_{\substack{\nearrow \\ Z}}$$

$$\text{cioè } z = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$x - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$$

cioè deve soddisfare l'eqn. di W :

$$7(x_1 - t) - 2(x_2 - t) + 4(x_3 + t) = 0$$

$$7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = t(7 - 2 - 4)$$

$$t = 7x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

$$p(x) = x - (7x_1 - 2x_2 + 4x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ -7x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ 7x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ -7 & 3 & -4 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = (7x_1 - 2x_2 + 4x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ -7x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 7 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Scoperto: p è l'appl. associata a $P = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ -7 & 3 & -4 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
 q è l'appl. associata a $Q = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 7 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Voglio verificare: $p \circ p = p$ $q \circ q = q$ $p \circ q = 0$ $q \circ p = 0$

So: la composiz. di appl. corrisponde al prodotto di matr.

Dunque basta: $P \cdot P = P$ $Q \cdot Q = Q$ $P \cdot Q = 0$ $Q \cdot P = 0$

$$P \cdot P = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ -7 & 3 & -4 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ -7 & 3 & -4 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36-14-28 & -12+6+8 & * \\ * & * & * \\ * & * & -28+8+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & * \\ * & * & * \\ * & * & 5 \end{pmatrix} \checkmark$$