

Algebra Lineare 26/9/17

Carlo PETRONIO

www → home page
dida

www → queste lezioni

pdf / mp4

non pp

libro - Teoria
(Esposito) - Teori d'osserva

↳ www (Esposito)

ediz. 2017 con
bollicino
x contenuti extra www

Esercizi (prof. Pandini)

usiamo quelli della versione vzw
(li sono anche svolti le mete)

* studiare e tentare di fare gli
esercizi settimana per settimana

Orario: faccio $\frac{1}{2}$ ora acc.

mart 15:45 - 16:20 + 16:45 - 17:30

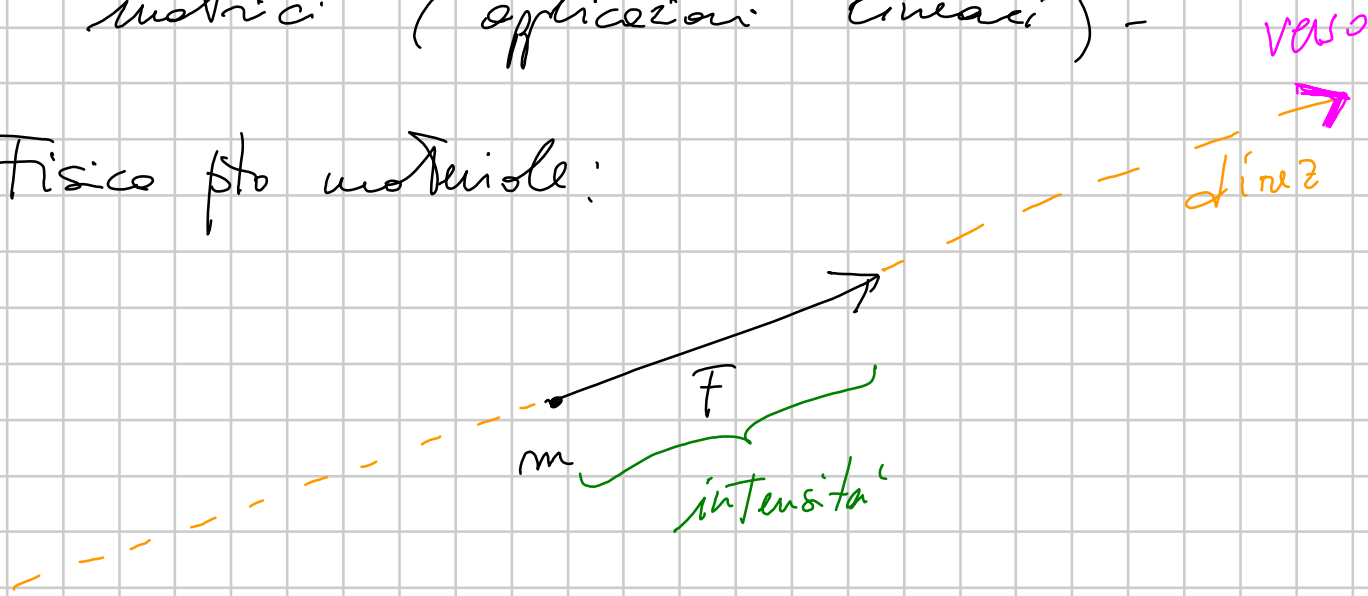
merc 10:40 - 11:25 + 11:35 . . . 13:15

CHIEDETE!

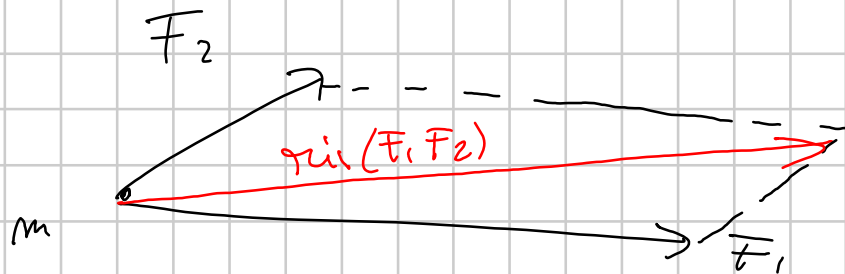
RISPONDETE!

Algebra lineare: vettori (spazi vettoriali)
matrici (applicazioni lineari) -

Fisico pto materiale:



Fatto: m soggetta a 2 forze F_1, F_2
equivalente a m soggetta a $\text{ris}(F_1, F_2)$



Proprietà: 4. $\text{ris}(F_1, F_2) = \text{ris}(F_2, F_1)$

$$3. \text{ris}(F_1, \text{ris}(F_2, F_3)) = \text{ris}(\text{ris}(F_1, F_2), F_3)$$

$$1. \text{ris}(F, 0) = F$$

↑ forza con intensità nulla
(direz. e verso non definiti)

$$2. \text{ris}(F, -F) = 0$$

↑

direz. e intensità come $\vec{F}$
verso opposto

Nota che il + tra "numeri"

- | | | | |
|----|--------------------------|-----------------------------|--------------|
| 1. | $x + 0 = x$ | $\forall x$ | el. neutro 0 |
| 2. | $\forall x \exists (-x)$ | t.c. $x + (-x) = 0$ | ist. opposto |
| 3. | $\forall x, y, z$ | $x + (y + z) = (x + y) + z$ | associative |
| 4. | $\forall x, y$ | $x + y = y + x$ | commutative |

Dato l'analisi delle proprietà, decido di scrivere

$\overline{F_1} (+) \overline{F_2}$ nuovo significato

invece che $\text{sis}(F_1, F_2)$.

Vantaggio: trattare con linguaggio unificato

oggetti / problemi di natura diversa fra loro

Quattro:

$$F + F = 2 \cdot F$$

nuovo uso di prodotto

$$3F, 4F \dots$$

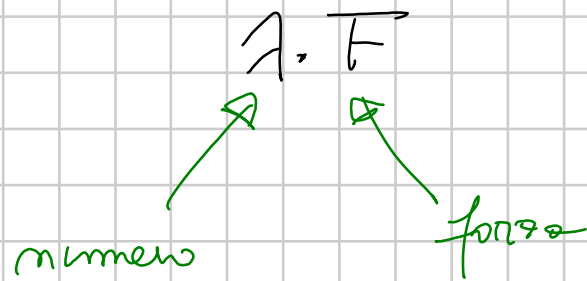
$$\frac{1}{2}F = G \quad \text{t.c.} \quad 2 \cdot G = F$$

$$-7F = G \quad \text{t.c.} \quad G + 7F = 0$$

$\leadsto \lambda \cdot F =$ forza con direz. come F
verso come F se $\lambda \geq 0$
opposto se $\lambda \leq 0$
intensità $|\lambda|$ quella di F

nuovo

Att: $2 \cdot y$ the number
 $\uparrow \uparrow$
 effect like stone motion



Properties:

$$5. \quad 1 \cdot (\mu \cdot F) = (1 \cdot \mu) \cdot F$$

$$6. \quad (1 + \mu) \cdot F = 1 \cdot F + \mu \cdot F = (1 \cdot F) + (\mu \cdot F)$$

$$7. \quad \lambda \cdot (F+G) = \lambda \cdot F + \lambda \cdot G$$

$$8. \quad \underline{1} \cdot F = F \quad , \quad \underline{0} \cdot F = 0 \quad , \quad \lambda \cdot 0 = 0$$

Proprietà 7-8 = def di sp. vet.

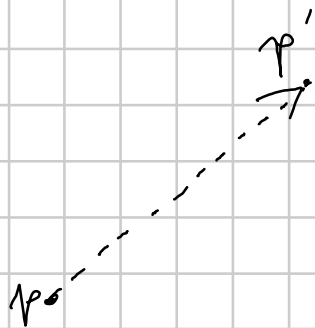
Trasformazioni nel piano

$P = \text{piano}$

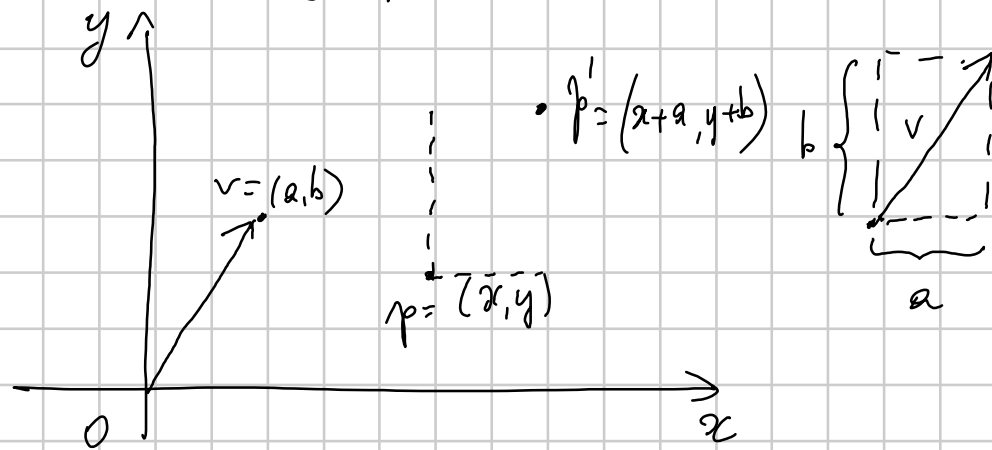
$v = \text{vettore}$

$$T_v: P \rightarrow P$$

$$p \mapsto p'$$



Fisso su P coord. cartesiane



Cioè : $T_v(x, y) = (x+a, y+b)$. Definisci.

scrivere : $(x+a, y+b) = (x, y) + (a, b)$

cioè una traslazione anche tra pti. del piano
(fissate le coordinate) -

Proprietà:

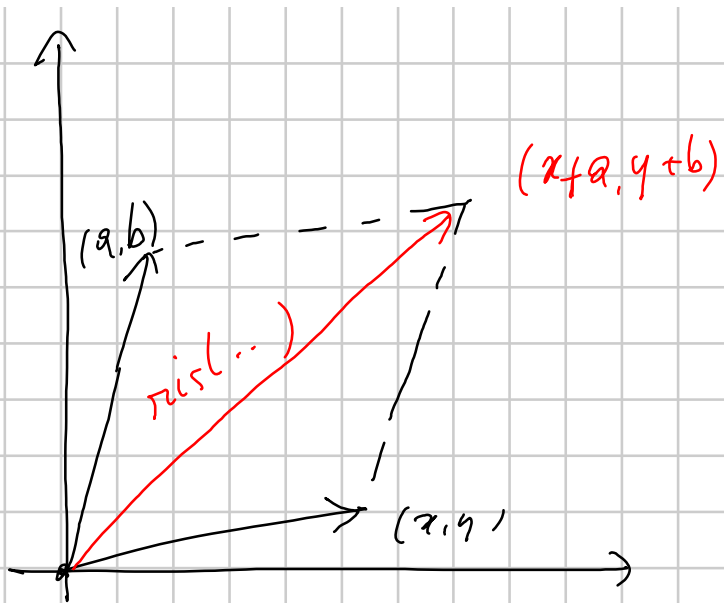
1. $p + 0 = p \quad \forall p \quad 0 = \text{origine}$

2. $\forall p \exists -p \text{ t.c. } p + (-p) = 0 \quad \begin{array}{l} p = (x, y) \\ -p = (-x, -y) \end{array}$

3. $p + (q + r) = (p + q) + r$

4. $p + q = q + p$

Stato d. prima. (In realtà è come prima).



Definizione di rotazione λ e centro C : $P \rightarrow P'$

se $P = C$, viene C



p' sulla retta pC t.c.

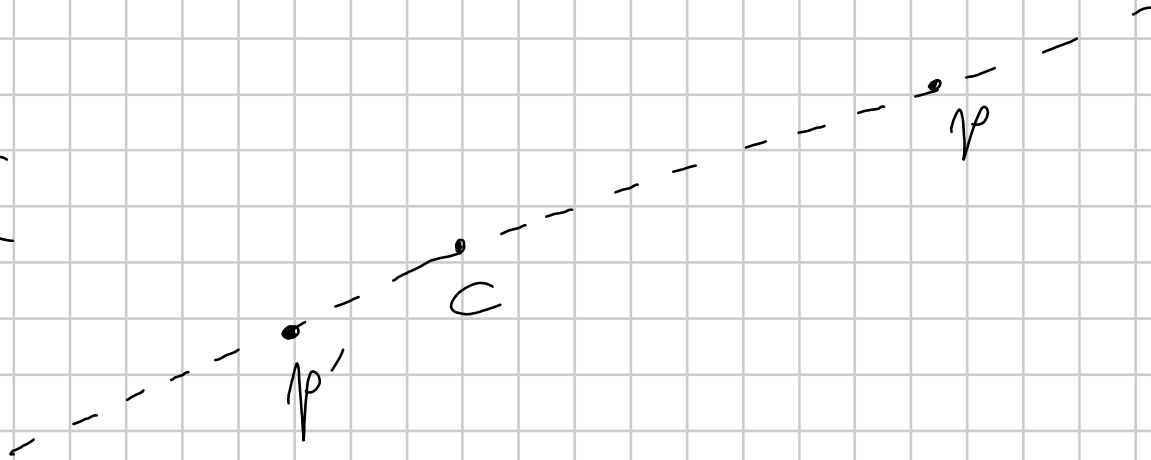
$$\overline{p'C} = |\lambda| \cdot \overline{pC}$$

dalla stessa parte se $\lambda \geq 0$, oppure se $\lambda \leq 0$:

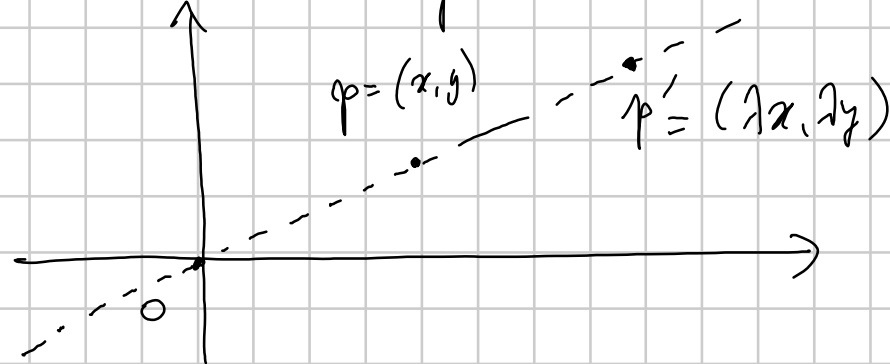
$$\lambda = 3$$



$$\lambda = -\frac{1}{2}$$



Fissiamo riferimento con origine in c :



Definiamo da $(\lambda.x, \lambda.y)$ lo scivo $\lambda.(\lambda.y)$

$\uparrow$
muovo

Stare proprietà:

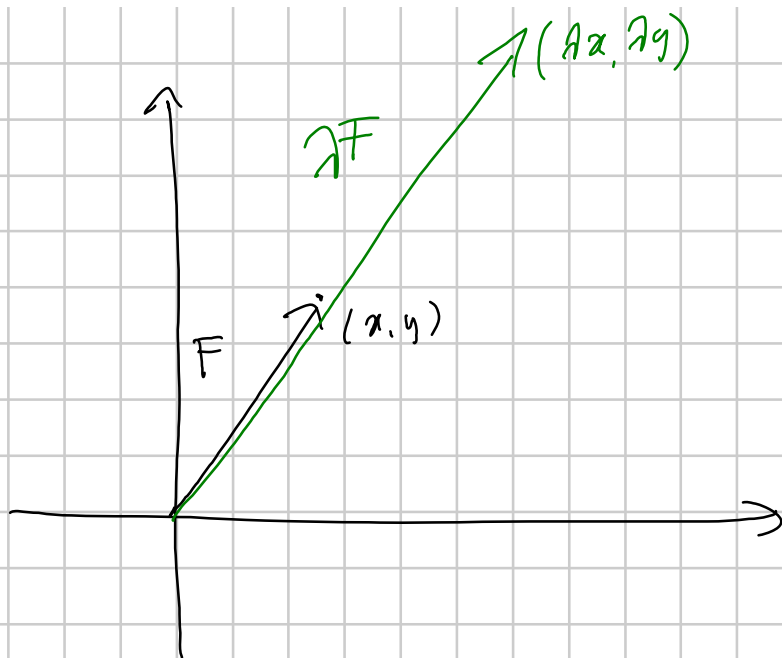
$$5. (\lambda.x).y = \lambda.(x.y)$$

$$6. (\lambda.x + y).z = \lambda.x + y.z$$

$$7. \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$$

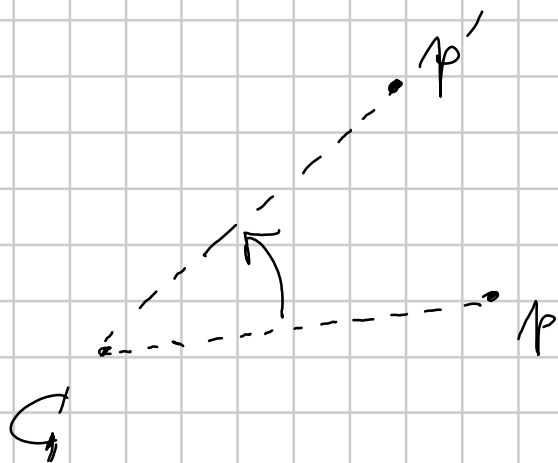
$$8. \lambda.x = x, \quad 0.y = 0, \quad \lambda.0 = 0$$

Justine:

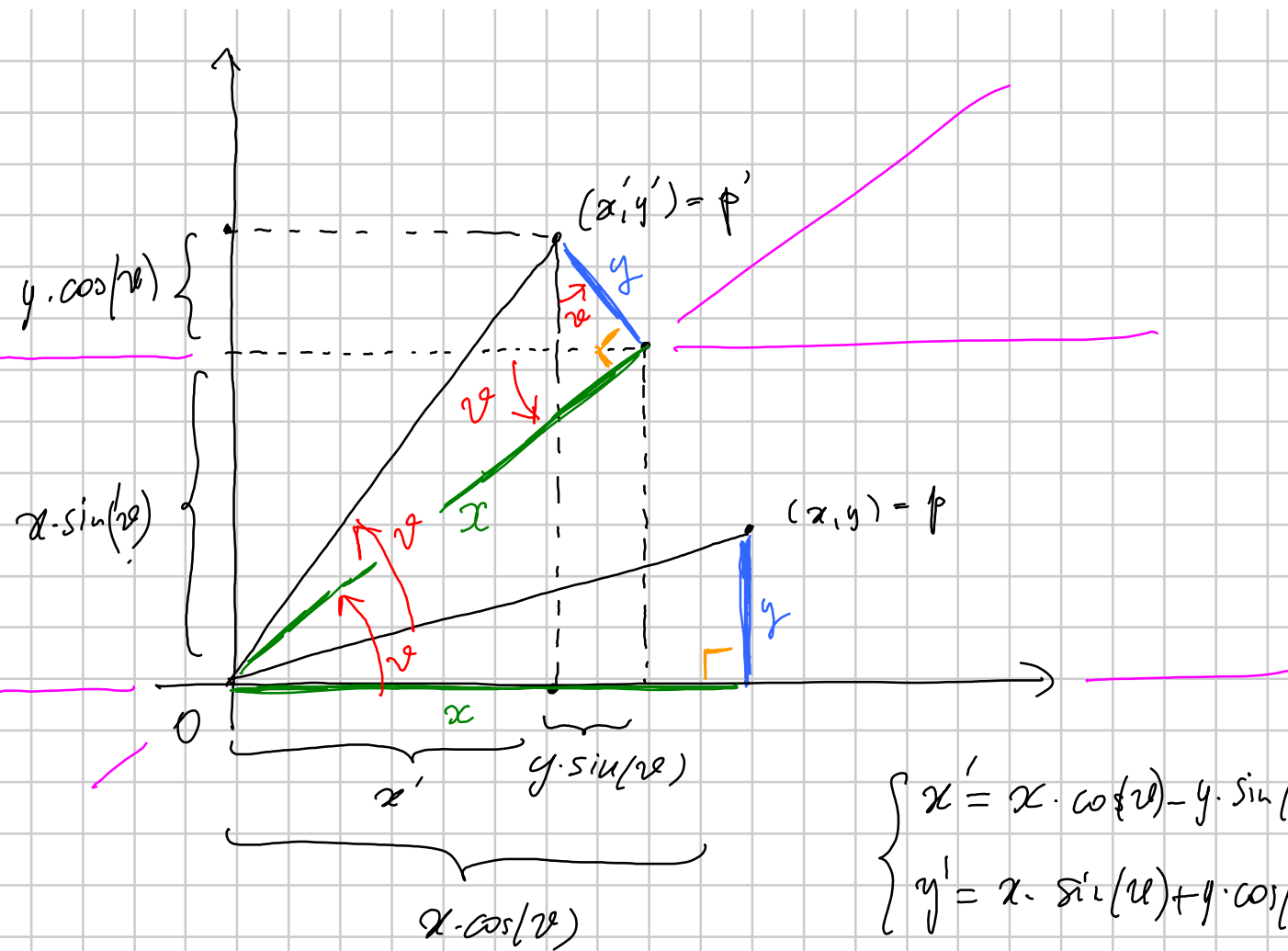


Rotazione di centro C e angolo α :

$$\pi_{v,C} : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ p & \longmapsto & p' \end{array}$$



Fissando coordinate con origine in C :



$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta) \\ y' = x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

(PRIMA: deciso che siamo
le coordinate in colonna e
non in
riga)

potremmo scriverla come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{\theta} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$R_{\theta} =$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

movimento:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

fatte in modo che
$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v \cdot x - \sin v \cdot y \\ \sin v \cdot x + \cos v \cdot y \end{pmatrix}.$$

Chiamo $\pi_v : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ rotaz. di v intorno a O

v, φ angoli:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_\varphi \circ \pi_v & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ \mathbb{P} & \xrightarrow{\pi_v} & \mathbb{P} & \xrightarrow{\pi_\varphi} & \mathbb{P} \\ p & \longmapsto & \pi_v(p) & \longmapsto & \pi_\varphi(\pi_v(p)) \end{array}$$

$$(\pi_\varphi \circ \pi_v)(p) = \pi_\varphi(\pi_v(p))$$

Chiuso : $\pi_\varphi \circ \pi_\psi = \pi_{\varphi+\psi}$.

$$(\pi_\varphi \circ \pi_\psi)(p) = \pi_\varphi(\pi_\psi(p)) = \pi_\varphi(\pi_\psi(p)) = \pi_\varphi(\pi_\psi(p))$$

$$(\pi_{\varphi+\psi})(p) = R_{\varphi+\psi} \cdot p \stackrel{?}{=} (R_{\varphi} \cdot R_{\psi}) \cdot p$$

= repole di ultima
inverte la
matrice e ritrovo

- de invuTane

Lo inverto con:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

Usiamo le per

$$R_\varphi \cdot R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix}$$

è $R_{\varphi+\psi}$. Dunque:

- la operazione geometrica di composizione di funzioni si traduce nella operazione algebrica di prodotto di matrici
- l'operaz. algebrica contiene le formule trigonometriche di seno e coseno.

————— ◦ —————

Oss sulle composizioni:

funzione

$$f: X \xrightarrow{\text{legge}} Y$$

dominio codominio

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \quad X \xrightarrow{f} Y$$

1) $f \circ g$ ha senso solo se $Z = X$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & g \circ f & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & f \circ g & & & \end{array}$$

2) $f \circ g = g \circ f$ he senso solo se $Y = X$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & g \circ f & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & f \circ g & & & \end{array}$$

3) Anche se $Z = Y = X$ non è sempre vero:

Es 1: $X = \mathbb{P}$ piano $f = \pi_{\mathcal{V}}$ $g = \pi_{\mathcal{U}}$

$$\pi_{\mathcal{V}} \circ \pi_{\mathcal{U}} = \pi_{\mathcal{U}} \circ \pi_{\mathcal{V}}$$

Es 2: $X =$ numeri di qualche tipo
 $f(x) = 2x$ $g(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 4x^2$$

$$(f \circ g)(1) = 2$$

$$(g \circ f)(1) = 4$$

$$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f.$$

————— 0 —————

Successione di Fibonacci: $(f_m)_{m=0}^{+\infty}$

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{cases}$$

$$f_{m+2} = f_m + f_{m+1} \quad \forall m \geq 0$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Q: $f_{1020090} = ?$

Tab: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}_{\sim 1.62\dots} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}_{\sim -0.62\dots} \right)$

transcendental for $n \gg 0$

